Math. P.
740
o

Math. P. 740 o

Anleitung

zur

höhern Zinsrechnung,

nebst

Logarithmen-Tafeln

der

Zahlen von 1 bis 10000 in
7 Decimalstellen,

von

Dr. M. Creizenach.

Bayer. Staatsministerium
f. Ernährung, Landwirtschaft u. Forsten
Ministerialforstabteilung
Bücherei

Mainz, 1825.
Bei Florian Kupferberg.

Kön. Baier.
Ministerial
Haupt u Forst.
Buchhaltung

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

1187

Vorrede.

Ich bin durchaus vom Anspruche fern, durch diese Anleitung zur höhern Zinsrechnung, die schon früher erschienenen Schriften über diesen Theil der Arithmetik entbehrlich machen oder gar verdunkeln zu wollen, und glaube vielmehr, daß Lehrer und Lernende nachdem sie sich durch diese Schrift, die sich vorzüglich durch Leichtigkeit und durch die beigefügten Tafeln des H. Hoffmann empfehlen soll, den Weg zur höhern Arithmetik gebahnt, sehr gut thun werden, die Werke der H. Schweins und Brune über diesen Gegenstand zu lesen.

Sollten sich indessen diese Bogen einer öffentlichen Beurtheilung zu erfreuen haben, so glaube ich, daß die darin enthaltenen Ansichten über Stück-

zahlungen, Zielzahlungen mit einfachen Zinsen, Zinsen die im Laufe des Jahres gezahlt werden, und die Auflösung der meisten Aufgaben ohne den Gebrauch der geometrischen Progression einige Aufmerksamkeit verdienen.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Vom Gebrauche der beigefügten Logarithmen-Tafeln 1

Nöthige Formeln der arithmetischen und geometrischen Progressionen 6

Formeln für die einfache Zinsrechnung 15

Formeln für die Zinszinsrechnung 17

Anwendung der hier bewiesenen Formeln.

A. Berechnung der zurückzuzahlenden Summe 24

B. Berechnung des Kapitals 27

C. Berechnung des Zinsfußes 29

D. Berechnung der Zeit 30

Vom Interusurium 33

Von Stückzahlungen 36

Aufgaben zur Uebung 42

Aufgaben, bei welchen die Formeln der geometrischen Progression angewendet werden 47

Zielzahlungen 56

	Seite
Bestimmung der Zeit bei Zielzahlungen	65
Bestimmung der Prozenten bei Zielzahlungen . . .	75
Von Zielzahlungen mit einfachen Zinsen	82
Von Zinsen im Laufe des Jahres	91

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Vom Gebrauch der beigefügten logarithmischen Tafeln.

Die Kenntniß der allgemeinen Lehre der Logarithmen wird vorausgesetzt; nur das Eigenthümliche der Tafeln soll hier erklärt werden. Diese Tafeln hat Herr Prof. Hoffmann in Aschaffenburg für seinen mathematischen Jugendfreund, wovon bereits der erste Band beim Verleger dieser Schrift die Presse verlassen hat, verfertigt, und es geschieht mit seiner Einwilligung, daß sie auch hier beigefügt werden, wofür ich ihm mit Vergnügen öffentlich danke. Wer diese Tafeln mit andern dieser Art vergleicht, wird einsehen, daß sie in dem möglichst engen Raume dieselbe Bequemlichkeit und mehr Genauigkeit gewähren, indem sie für jede Zahl von 1 bis 10,000 den Logarithmus in 7 Dezimalstellen geben, welches die Grüson'schen und andere kleine Tafeln nicht leisten. Um zu zeigen, wie dies Herrn Hoffmann gelungen ist, setze ich seine eigene Auflösung der Aufgabe her, wie man vermittelst seiner Tafeln für eine gegebene Zahl den Logarithmus finde.

Zu jeder ganzen Zahl von 1 bis 4 Ziffern den zugehörigen Logarithmus zu finden.

I. Zur Auflösung dieser und der folgenden Aufgaben dient die, dieser Schrift angehängte Logarithmentafel, vermittelst welcher man nicht nur die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000 sehr bequem finden, sondern auch die Logarithmen aller übrigen Zahlen von 5, 6 und 7 Ziffern (ohne die sich zur Rechten oder Linken derselben befindlichen Nullen mit zu zählen) durch eine leichte Rechnuug bestimmen kann. Sie füllt in dieser neuen Gestalt nur etwas mehr als drei Bogen an, da z. B. die Blacq'schen Tafeln mehr als 6 Bogen einnehmen.

II. Soll man den, zu einer Zahl von 1 bis 99 einschließlich gehörigen Logarithmen finden, so suche man diese Zahl in der mit Z bezeichneten Spalte auf, und der zu findende Logarithme steht unmittelbar zur Rechten neben ihr in der mit Null bezeichneten Spalte. Wenn weder die Kennziffer, noch die Zehntel der Mantisse dabei stehen, so werden beide von dem zunächst darüber sich befindlichen Logarithmen heruntergenommen.

So ist z. B. Log. 20 = 1,3010300
Log. 21 = 1,3222193
Log. 25 = 1,3979400
Log. 51 = 1,7075702
Log. 58 = 1,7634280
Log. 72 = 1,8573321
Log. 79 = 1,8976275
Log. 99 = 1,9956352

III. Enthält aber die gegebene Zahl drei Ziffer und ist nicht größer als 999, so suche man in der mit 0, 100, 200, 300 bezeichneten, mit größern Ziffern bemerkten wagrechten Reihe, die gegebenen Hunderte; in der mit Z bezeichneten Spalte aber die gegebenen Einer und Zehner auf, so wird sich der Logarithmus da befinden, wo die von den Hunderten herabgezogene lothrechte und die von den Zehnern und Einern zur Rechten gezogene wagrechte Linie sich einander durchschneiden.

So ist z. B. Log. 114 = 2,0569048
Log. 225 = 2,3521825
Log. 333 = 2,5224441
Log. 248 = 2,3944517
Log. 336 = 2,5263393
Log. 278 = 2,4440448
Log. 390 = 2,5910646
Log. 399 = 2,6009729

IV. Auf ähnliche Weise verfährt man auch, wenn die gegebene Zahl größer als 999 ist. Nur hat die Logarithmentafel hier, zur größern Raumersparniß, die Einrichtung erhalten, daß sich in der obersten Horizontalreihe der mit größern Ziffern bemerkten Zahlen jedesmal sechs Fächer neben einander befinden. Die unmittelbar darunter stehende wagrechte Reihe enthält in der zur Linken stehenden Ziffer die Kennziffer und in der nach dem Einerstrich stehenden Ziffer die Zehntel der Mantisse, welche beide zu jenen übrigen 6 Decimalstellen gesetzt werden, welche in der lothrechten Reihe der

Hunderte und Tausende und in der wagrechten der Zehner und Einer der gegebenen Zahl da liegen, wo beide Reihen zusammentreffen.

I. Wenn die Zahl, deren Logarithmus gefunden werden soll, aus 5, 6 oder 7 Ziffern besteht, so schneide man von der Rechten zur Linken 1, 2 oder 3 Ziffer ab; so, daß sich zur Linken immer noch 4 Ziffer befinden;

II. Diese vierzifferige Zahl suche man in den Tafeln auf, ziehe ihren Logarithmen (ohne ihn herauszuschreiben) von dem Logarithmen der um 1 größern Zahl und bemerke diese Differenz, ohne die Nullen der höheren Bruchstellen auf einem besondern Papiere;

III. Nun multiplicire man diese Differenz mit den nach I. abgeschnittenen Ziffern und werfe im Producte so viele Ziffer von der Rechten zur Linken hinweg, als wie viele man nach I. abgeschnitten hatte. Wenn die höchste dieser weggeworfenen Ziffer größer als 5 ist, so wird die niedrigste der stehenbleibenden um eine Einheit vermehrt;

IV. Werden nun die in III. erhaltenen Ziffer zu den niedrigsten Bruchstellen des Logarithmen der in I. stehen gebliebenen vierzifferigen Zahl addirt, so gibt diese Summe die Mantisse des gesuchten Logarithmen, welcher man nun noch die gehörige Kennziffer beifügt.

V. Anwendungen dieser Regeln.

1) Was ist Log. 68375?

Regel I. gibt 6837 | 5

Regel II. gibt zur Differenz: 635

Regel III. gibt $635 \times 5 = 317$ (5

Regel IV. gibt $\left.\begin{array}{r} 3,8348656 \\ 1,\quad 317 \end{array}\right\}$ addirt.

Log. 68375 = 4,8348973

2) Was ist Log. 17834?

Regel I. gibt 1783 | 4

Regel II. gibt zur Differenz: 2436

Regel III. gibt: $2436 \times 4 = 974$ (4

Regel IV. gibt $\left.\begin{array}{r} 3,2511513 \\ 1,\quad 974 \end{array}\right\}$ addirt.

Log. 17834 = 1,2511513

3) Was ist Log. 384625?

Regel I. gibt 3846 | 25

Regel II. gibt die Differenz 1129

Regel III. gibt $1129 \times 25 = 282$ (25

Regel IV. gibt $\left.\begin{array}{r} 3,5850093 \\ 2,\quad 282 \end{array}\right\}$ addirt

5,5850375

Nöthige Formeln der arithmetischen und geometrischen Progressionen.

Eine Progression ist eine Reihe von Zahlen, in welcher jede Stelle aus einer oder mehreren der vorhergehenden nach einem bestimmten Gesetze gebildet wird. So ist z. B. die natürliche Folge der Zahlen: 1, 2, 3, 4 ꝛc. eine Progression; denn jede Stelle wird gebildet, indem man zu der vorherigen 1 addirt, so ist $5 = 4 + 1$, $6 = 5 + 1$ ꝛc. Man kann sich auch in dieser Reihe jede Stelle aus den zwei unmittelbar vorherstehenden gebildet denken; denn jede Stelle gleicht dem Doppelten der vorhergehenden weniger einmal der dieser vorangehenden; so ist $6 = 2 \times 5 - 4$, $5 = 2 \times 4 - 3$ ꝛc.

Man sieht leicht aus dieser Erklärung, daß es unzählig viele Progressionsarten geben könne, indem sich die größte Mannigfaltigkeit in den Gesetzen denken läßt, nach welchen jede Zahl aus den vorhergehenden gebildet wird; hier beschäftigen wir uns aber nur mit den zwei Progressionsarten, welche man die arithmetische und die geometrische nennt.

In der arithmetischen Progression entsteht jede Stelle, wenn man zu der vorhergehenden dieselbe Zahl addirt, oder dieselbe Zahl davon abzieht, oder, was dasselbe ist, zwei nebeneinander stehende Zahlen haben stets dieselbe Differenz. Es giebt demnach zunehmende und abnehmende Reihen.

Beispiel einer zunehmenden Reihe:

5, 9, 13, 17, 21, ꝛc.

Beispiel einer abnehmenden Reihe:

8, 5, 2, —1, —4, ꝛc.

In der ersten Reihe ist hier die beständige Differenz = 4 und in der zweiten ist sie = 3.

Eine Progression ist geometrisch, wenn jede Zahl gebildet wird, indem man die vorhergehende mit einem bestimmten Faktor multiplizirt, oder, was dasselbe ist, zwei auf einander folgende Stellen haben immer denselben Quotient. Auch eine geometrische Progression kann zunehmend oder abnehmend seyn, je nachdem der beständige Faktor größer oder kleiner als die Einheit ist.

Beispiel einer zunehmenden Reihe:

3, 12, 48, 192, ꝛc.

Beispiel einer abnehmenden Reihe:

$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$, ꝛc.

In der ersten dieser Reihen ist der beständige Faktor = 4 und in der zweiten $= \frac{1}{3}$.

Bezeichnet man die erste Stelle einer arithmetischen Progressicn durch c, die beständige Differenz durch d, die letzte Stelle durch l, die Zahl der Stellen durch v und die Summe der Stellen

durch u, so stehen die 5 Größen c, d, l, v, u in einer gegenseitigen Beziehung, vermittelst welcher 2 dieser Größen berechnet werden können, wenn die 3 andern gegeben sind. Diese Beziehung ist durch zwei Formeln ausgedrückt, welche jetzt aufgesucht werden sollen.

Da die erste Stelle c und die beständige Differenz d ist, so ist die 2te Stelle $=c+d$, die 3te $=c+2d$, die 4te $=c+3d$, und überhaupt die vte Stelle oder $l=c+(v-1)d$. Diese Gleichung giebt den Werth von l oder der letzten Stelle, wenn die erste nebst der Anzahl der Stellen und der beständige Faktor gegeben ist. Es sey z. B. die erste Stelle $c=5$, die Anzahl der Stellen $v=15$ und die beständige Differenz $d=3$, so ist $l=5+(15-1)3=47$.

Eine 2te Gleichung zwischen den erwähnten 5 Größen erhält man, indem man einen Ausdruck für die Summe aller Stellen oder u sucht. Man hat die Gleichung

$$u=c+c+d+c+2d+c+3d+\text{ꝛc.}+$$
$$+c+(v-1)d=vc+d+2d+3d+\text{ꝛc.}+$$
$$+(v-1)d=vc+d(1+2+3+4+\text{ꝛc.}+(v-1)).$$

Um diese Gleichung auf eine andere zu reduziren, die eine bestimmte Anzahl von Gliedern hat, muß man die Reihe:

$$1+2+3+4+\text{ꝛc.}+v-1$$

zu summiren suchen. Zu diesem Ende bemerke man, daß jedes der $v-1$ Glieder, aus welchen diese Reihe besteht, durch ein andres Glied derselben

Reihe zu v ergänzt werden kann, z. B. 1 durch v — 1, 2 durch v — 2. Nimmt man also die Reihe doppelt, so wird jedem Glied dadurch beigefügt, was ihm an v fehlt, woraus hervorgeht, daß die doppelte Summe der Reihe so vielmal v enthält, als die Reihe Glieder enthält; diese doppelte Summe ist also $= v(v-1)$; mithin ist die einfache Summe $= \frac{v(v-1)}{2}$. Stellt man nun diesen Werth statt der Reihe in den obigen Ausdruck für u, so ist

$$u = vc + d\left(\frac{v(v-1)}{2}\right) = vc + vd\frac{v-1}{2} =$$

$$= \frac{2vc + vd(v-1)}{2} = \frac{vc + vc + vd(v-1)}{2}$$

$$= \frac{v(c + c + d(v-1))}{2} = \frac{v(c+l)}{2};$$

d. h., um eine arithmetische Progression zu summiren, addirt man die erste Stelle zu der letzten, multiplizirt das Herauskommende mit der Anzahl der Stellen, und dividirt das Product durch 2. Es sey z. B. die erste Stelle $= 7$, die Anzahl der Stellen $= 24$ und die beständige Differenz $= 4$, so ist $l = 7 + 23 . 4 = 99$ und $u = \frac{24(7+99)}{2} = 1272.$

Es ist schon oben bemerkt worden, daß die natürliche Reihenfolge der Zahlen auch eine arithmetische Progression ist. In dieser ist $c = 1$, $d = 1$, und wenn v die Anzahl der Stellen bezeichnet, so ist

$l = 1 + (v - 1) = v$, und $u = \frac{v(v+1)}{2}$

$= \frac{v^2 + v}{2}$, welche Formel keine Schwierigkeit in der Anwendung darbietet.

Bezeichnet man in einer geometrischen Progression die erste Stelle ebenfalls durch c so wie die letzte durch l und die Zahl der Stellen durch v, ferner den beständigen Faktor durch q und die Summe der Stellen durch u, so kann man auch hier wie in der arithmetischen Progression 2 dieser 5 Größen finden, wenn die 3 andern gegeben sind. Man findet zuerst l vermittelst c, q und v, denn da q der beständige Faktor ist, durch welchen jedes Glied aus dem vorhergehenden gebildet wird, so ist das 2te Glied der Progression cq, das dritte cq^2, das 4te cq^3 und überhaupt das vte Glied oder $l = cq^{v-1}$. Es sey z. B. das erste Glied $= 3$, der beständige Faktor $= 2$ und die Zahl der Glieder $= 6$, so ist

$$l = 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96.$$

Um eine geometrische Progression zu summiren, hat man die Gleichung:

$$u = c + cq + cq^2 + \text{etc.} + cq^{v-1}.$$

Um sie in eine andere zu verwandeln, die eine bestimmte Anzahl von Gliedern hat, addirt man zu beiden Theilen der Gleichung cq^v, man hat alsdann:

$u + cq^v = c + cq + cq^2 + \text{etc.} + cq^{v-1} + cq^v =$
$= c + q(c + cq + cq^2 + \text{etc.} + cq^{v-1}) = c + qu$,
also $u - qu = c - cq^v$, oder $u(1-q) = c(1-q^v)$

und $u = \frac{c(1 - q^v)}{1 - q}$, oder auch

$u = \frac{c(q^v - 1)}{q - 1}$, indem bekanntlich ein Bruch unverändert bleibt, wenn man jedem Gliede im Zähler und im Nenner ein entgegengesetztes Zeichen giebt. Man gebraucht gewöhnlich die erste dieser zwei Formeln, wenn der Faktor q, und folglich auch jede seiner Potenzen kleiner als Eins ist, die zweite Formel hingegen, wenn q größer als Eins ist, wodurch immer sowohl der Zähler als der Nenner des Bruches positiv ist.

Setzt man den Werth von u in folgende Gestalt:
$u = \frac{c - c\,q^v}{1 - q}$, so läßt sich die Formel auf folgende Weise durch Worte ausdrücken: Man zieht vom ersten Gliede dasjenige Glied ab, welches auf das letzte folgen würde, wenn man die Progression nach dem Bildungsgesetze der Glieder fortsetzte (oder man zieht von diesem Gliede das erste ab, wenn $q > 1$); das Herauskommende dividirt man dann durch die Einheit vermindert um den beständigen Faktor, oder durch den beständigen Faktor vermindert um die Einheit, je nachdem $q <$ oder > 1, so findet man die Summe der Glieder. Hier folgen nun einige Beispiele zur Uebung.

Wie groß ist die Summe sämmtlicher Glieder einer geometrischen Reihe, wenn die erste Stelle 1, die Anzahl der Stellen 8 und der beständige Faktor 3 ist, oder wenn $c = 1$, $v = 8$, $q = 3$?

Man bestimme zuerst den Werth des Gliedes cq^v, welches am besten mit Hülfe der Logarithmen geschieht. Man hat nämlich:

$$\log. cq^v = \log. c + \log. q^v = \log. c + v \log. q.$$

Hier ist $\log. c = 0{,}0000000$

$v \log. q = 8 \log. 3 = 3{,}8169704$

$$\log. cq^v = 3{,}8169704.$$

Man findet hiedurch $cq^v = 6561$, also

$$u = \frac{cq^v - c}{q-1} = \frac{6561 - 1}{3-1} = \frac{6560}{2} = 3280.$$

Wie groß ist die Summe einer geometrischen Reihe von 100 Gliedern, wenn die erste Stelle $= 5$ und der beständige Faktor $= \frac{1}{7}$?

Da q hier ein Bruch ist, so ist sein Logarithmus eine negative Zahl, folglich wird der arithmetische Werth von v log. q nicht wie im vorigen Beispiel zu log. c addirt, sondern davon abgezogen, oder auch log. c wird von v log q abgezogen, wenn dieses einen größern arithmetischen Werth hat.

Man hat hier:

$\log.' c = 0{,}6989700$

$v \log. q = 10 \log. \frac{1}{7} =$

$10 \times - 0{,}8450980 = - 8{,}4509800$

$$\log. c + v \log. q = - 7{,}7520100$$

Der hier gefundene Logarithmus ist negativ; um die entsprechende Zahl in der Tafel zu finden, suche man zuerst $100000000\, cq^v$ statt cq^v.

Es ist $\log. 100000000\, cq^v = \log. 100000000 + \log. cq^v = 8 - 7{,}7520100 = 0{,}2479900.$

Man findet hierdurch $100000000\,c\,q^v = 1{,}77007$ und $c\,q^v = 0{,}0000000177007$; daher

$$u = \frac{c - c\,q^v}{1 - q} = \frac{5 - 0{,}000000177007}{1 - \frac{1}{7}} =$$

$$= \frac{4{,}9999999822993}{\frac{6}{7}} = \frac{7 \times 4{,}999999822993}{6}$$

$$= \frac{34{,}999399876094}{6} = 5{,}833333312675.$$

Die hier angewandte Methode zur Aufsuchung der Zahl für einen negativen Logarithmus kann bei jedem negativen Log., dessen Kennziffer $= -n$ gebraucht werden; man denkt sich nämlich die zu suchende Zahl mit 10^n multiplizirt, wodurch der Log. um $+n$ zunimmt, und folglich positiv wird. Die herauskommende Zahl wird alsdann durch 10^n] dividirt.

Da der Gebrauch der negativen Logarithmen einige Beschwerlichkeit mit sich führt, so kann es oft bequem scheinen, ihn zum Theil zu vermeiden, welcher Zweck dadurch erreicht werden kann, daß man die Progression in umgekehrter Ordnung schreibe, oder, was dasselbe ist, das letzte Glied als das erste, und das erste Glied als das letzte betrachte, wodurch der beständige Faktor größer wird als Eins und folglich einen positiven Logarithmus hat.

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel, welches noch in der Folge vorkommen wird.

Es soll eine geometrische Reihe von 7 Gliedern summirt werden, deren erstes Glied =

$= 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^3$ und deren beständiger Faktor =
$= \left(\frac{100}{105}\right)^3$.

Das letzte Glied dieser Reihe ist =
$= 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^3$ multiplizirt mit der 6ten Potenz von $\left(\frac{100}{105}\right)^3$ oder mit $\left(\frac{100}{105}\right)^{18}$, es ist also =
$= 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{21}$. Betrachtet man nun dieses letzte Glied als das erste, so ist das zweite =
$= 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{18}$, welches entsteht, wenn man das erste mit $\left(\frac{105}{100}\right)^3$ multiplizirt, welche Größe also der beständige Faktor der Progression ist. Ferner ist das letzte Glied $= 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^3$, und das nach dem Gesetze der Progression darauf folgende =
$= 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^3 \left(\frac{105}{100}\right)^3 = 1200.$

Man hat also

$$u = \frac{1200 - 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{21}}{\left(\frac{105}{100}\right)^3 - 1} = \frac{1200 - 411{,}34}{1{,}1576 - 1} =$$

$$= \frac{788{,}66}{0{,}1576} = 5004.$$

Formeln für die einfache Zinsrechnung.

1) Wenn eine Summe $= a$ zu p Procent aussteht, so findet man den jährlichen Zins z durch die Proportion $100 : p = a : z$, also $z = \frac{a\,p}{100}$. Ist z. B. $a = 1200$, $p = 5$, so ist $z = \frac{1200 \times 5}{100} = 60$.

Bezeichnet man durch S die Größe der Schuld nach einem Jahre für Kapital nebst Zinsen, so hat man $s = a + z = a + \frac{a\,p}{100} = \frac{a\,(100 + p)}{100}$, und setzt man $\frac{100 \times p}{100} = r$, so ist $s = a\,r$. Für das obige Beispiel ist $r = \frac{100 \times 5}{100} = \frac{21}{20}$ und $s = \frac{1200 \,.\, 21}{20} = 1260$.

Da der Zins z jedes Jahr entrichtet werden muß, so findet man denselben für eine beliebige Zahl von Jahren $= n$, wenn man mit dieser Zahl den jährlichen Zins $\frac{a\,p}{100}$ multiplizirt; bezeichnet man demnach den Zins für n Jahre durch Z, so ist $Z = \frac{n\,a\,p}{100}$. Vermittelst dieser Formel kann man jede der 4 Größen Z, n, a, p finden, wenn die drei andern gegeben sind; man hat nämlich

$$n = \frac{100\,Z}{a\,p},\quad a = \frac{100\,Z}{a\,p},\quad p = \frac{100\,Z}{a\,n}.$$

Beispiele zu den letzten drei Formeln.

2) Wie lange müssen 1560 fl. zu 4 % stehen, um 75 fl. Zins zu tragen?

Hier ist $Z = 570$, $a = 1500$, $p = 4$, also

$$n = \frac{100 \,.\, 75}{1560 \,.\, 4} = 1\frac{29}{156}.$$

Welches Kapital trägt in 2 Jahr 4 Monat à $4\frac{1}{2}$ % 570 fl. Zins?

Hier ist $Z = 570$, $n = 2\frac{1}{3}$, $p = 4\frac{1}{2}$, also

$$a = \frac{57000}{2\frac{1}{3} . 4\frac{1}{2}} = \frac{342000}{63} = \frac{38000}{7} = 5428\tfrac{4}{7}.$$

Zu wie viel Procent müssen 2500 fl. ausstehen, um in 3 Jahr 5 Monat 341 fl. — 40 kr. Zins zu tragen?

Hier ist $Z = 341\frac{2}{3}$, $a = 2500$, $n = 3\frac{5}{12}$,

$$\text{also } p = \frac{341\frac{2}{3} \,.\, 100}{2500 \,.\, 3\frac{5}{12}} = \frac{410000}{102500} = 4.$$

3) Bezeichnet man durch S die Summe des Kapitals a und der Zinsen, die es in n Jahren à p % trägt, so ist $S = a + Z = a + \frac{n\,a\,p}{100} =$

$= \frac{a\,(100 + n\,p)}{106}$. Vermittelst dieser Formel kann man auch jede der Größen n, a, p finden, wenn die 2 andern nebst S gegeben sind. Man hat nämlich: $a = \frac{100\,S}{100 + n\,p}$, $100 + n\,p = \frac{100\,S}{a}$,

also $n\,p = \frac{100\,S}{a} - 100 = \frac{100\,(S - a)}{a}$ und

$$n = \frac{100\,(S - a)}{a\,p},\quad p = \frac{100\,(S - a)}{n\,a}.$$

Es ist überflüssig den Gebrauch dieser letztern Formeln durch Beispiele zu erläutern, indem man sich ihrer in der gemeinen Arithmetik, wo die einschläglichen Aufgaben vorkommen, nie zu bedienen pflegt. Hier sollen sie nur als Einleitung zu den verwickeltern Rechnungen dienen, zu welchen uns die Aufgaben über Zinszinsen führen werden.

Formeln für die Zinszinsrechnung.

4) Wer eine Summe zu bestimmten Procenten aufnimmt, geht die Verbindlichkeit ein, die jährlichen Zinsen am Ende jedes Jahres regelmäßig zu entrichten, wenn er auch das Kapital länger in Händen halten will. Wenn der Ausleiher ihn dazu anzuhalten unterläßt, so zieht er sich dadurch einen Schaden zu, indem er die Zinsen selbst als Kapital ausstellen könnte, welches ihm dann wiederum Zinsen einbrächte. Den Schuldner selbst aber zu nöthigen, wenn dieser die Zinsen nicht pünktlich entrichtet, daß er dieselben wiederum verzinse oder Zinszinsen zahle, ist er nicht berechtigt. Es giebt indessen mancherlei Fälle, in welchen Zinszinsen berechnet werden dürfen und müssen, welche hier anzugeben es um so weniger nöthig ist, als die meisten ohnedies später in besondern Aufgaben vorkommen werden. Die Berechnung der Zinszinsen

durch die Hülfsmittel der Arithmetik ist zwar etwas weitläuftig, bietet aber eigentlich keine Schwierigkeit dar. Man berechnet nämlich die Zinsen, welche das ausgeliehene Kapital im ersten Jahre trägt, addirt sie dann zum Kapital, berechnet hierauf die Zinsen, welche diese Summe im 2ten Jahre abwirft, und addirt das Herauskommende zu der vorigen Summe, welche Operation man so vielmal wiederholt, als die Zahl der Jahre ist, während welcher das Kapital ausgestanden, und so findet man endlich die verlangten Zinsen nebst Zinszinsen.

Beispiel. Wie viel tragen 600 fl. in 3 Jahren à 5 $\frac{0}{0}$ mit Zinszinsen?

		fl.	kr.
Das Kapital ist hier	=	6000	—
Zinsen v. ersten J. = $\frac{6000 \times 5}{100}$	=	300	—
Summe	=	6300	—
Zins. f. 6300 fl. v. 2. J. = $\frac{6300 \times 5}{100}$	=	315	—
Summe	=	6615	—
Zins. f. 6615 fl. v. 3. J. = $\frac{6315 \times 5}{100}$	=	330	45
Summe	=	6945	45

5) Diese Berechnung kann durch Anwendung des Kettensatzes etwas abgekürzt werden, welche Methode zugleich den Vortheil gewährt, daß man dadurch eine leichte Uebersicht des ganzen Verfahrens erhält, wodurch nachher die Ansätze erspart werden. Der Kettensatz lautet so:

Wie viel beträgt nach 3 J. — 6000 fl. Kapital?

100 fl. Kapital sind — 105 fl. nach 1 J.,
100 fl. nach 1 Jahre — 105 fl. nach 2 J.,
100 fl. nach 2 Jahren — 105 fl. nach 3 J.

Aus diesem Ansatze zieht man ohne Mühe die Regel, daß man die verlangte Summe des Kapitals und der Zinsen zu 5 % findet, wenn man das Kapital mit einer Potenz von 105 multiplizirt, deren Exponent der gegebenen Zahl der Jahre gleicht, und das Product durch eine eben so hohe Potenz von 100 dividirt, oder, was dasselbe ist, wenn man das Kapital mit einer Potenz von $\frac{105}{100} = \frac{21}{20}$ multiplizirt, deren Exponent die gegebene Zahl der Jahre ist. Es ist hier zu bemerken, daß sowohl diese Regel, als mehrere andere Regeln und Formeln, die in der Folge vorkommen werden, Modificationen erleiden, wenn die gegebene Zahl der Jahren aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht. Es versteht sich übrigens von selbst, daß die hier gefundene Regel allgemein genommen auch auf jeden andern Zinsfuß als 5 % angewendet werden kann.

6) Wenn umgekehrt die Summe gegeben wird, zu welcher ein Kapital, das zu einem gegebenen Zinsfuß ausgeliehen ist, in einer gegebenen Zeit angewachsen, und die Größe des Kapitals selbst gesucht wird, so gelangt man ebenfalls zum Resultat durch eine Reihe von Proportionen, wie aus folgendem Beispiele zu sehen ist:

Welches Kapital wächst in 5 Jahren 7 Monaten zu 8500 fl. an, wenn es zu 5 $\frac{0}{0}$ aussteht?

Stellt man durch x die Summe vor, zu welcher die Summe nach 4 Jahr 7 Monat angewachsen war, und bedenkt, daß man für jede 105 fl., die man nach Verlauf der 5 Jahre 7 Monat zu zahlen hat, ein Jahr früher nur 100 fl. zu zahlen brauchte, so erhält man die Proportion:

$$105 : 100 = 8500 : x = \frac{8500 \times 100}{105}.$$

Bezeichnet man ferner den Stand der Schuld nach 3 Jahren 7 Monaten durch y, so ist:

$$105 : 100 = \frac{8500 \times 100}{105} : y = \frac{8500 \times 100 \times 100}{105 \times 105}$$

Auf diese Weise findet man endlich für den Stand des Kapitals nach 7 Monaten

$$\frac{8500 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100}{105 \times 105 \times 105 \times 105}.$$

Um nun endlich das anfängliche Kapital zu finden, muß man zuerst berechnen, wie viel $\frac{0}{0}$ von einem Kapital nach 7 Monaten entrichtet werden müssen, wenn es à 5 $\frac{0}{0}$ p. a. aussteht, welches man durch folgende Proportion findet:

$$12 \text{ Mon.} : 7 \text{ Mon.} = 5 : \frac{5 \cdot 7}{12} = 2\frac{11}{12}.$$

Man findet nun das verlangte Kapital durch die

Proportion: $102\frac{11}{12} : 100 =$

$$= \frac{8500 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100}{105 \times 105 \times 105 \times 105 \times 105} : x = 6660 \text{ fl.}$$

Auch hier könnte man zum Resultate durch einen einzigen Kettensatz wie in §. 4. gelangen. Uebrigens kann man auch schon durch obige Proportionen sich von folgender allgemeinen Regel überzeugen: Um das Kapital zu finden, multiplizirt man die Summe, zu welcher es angewachsen ist, mit einer Potenz von $\frac{100}{105}$, deren Exponent der gegebenen Zahl von Jahren gleicht.

7) Wenn man sowohl die Potenzen von $\frac{105}{100}$ als von $\frac{100}{105}$ berechnet und sie in Decimalbrüche verwandelt, so könnte man Tafeln verfertigen, vermittelst welcher die Größe des Kapitals oder der Summe, zu welcher es in einer bestimmten Zeit anwächst, durch eine einzige, freilich oft sehr weitläufige, Multiplikation gefunden werden könnte; aber außerdem, daß der Gebrauch solcher Tafeln mit Vortheil durch die der Logarithmen ersetzt wird, ist auch ihre Anwendung auf die erwähnten zwei Aufgaben beschränkt, welche in der That die leichtesten sind, die bei der Zinszinsrechnung vorkommen.

Weit schwieriger und dem Gebiete der gemeinen Arithmetik fremder sind die Fälle, wo entweder der Zinsfuß oder die Zeit, die das Kapital ausgestanden, unbekannt ist, welche zu einer Wurzelausziehung oder zu einer unbestimmten Anzahl von Divisionen führen.

Diese Aufgaben und mehrere andre, hieher gehörigen, machen den Gebrauch der logarithmischen Tafeln und der algebraischen Formeln nöthig.

8) Stellt man wiederum, wie in §. 1, durch a, p, n, S das Kapital, den Zinsfuß, die Zeit, welche das Kapital ausgestanden, und die Summe, zu welcher es anwächst, vor, so ist, nach der Regel die man §. 5. gefunden, $S = a\left(\frac{100 + p}{100}\right)^n$, und setzt man $\frac{100 + p}{100} = r$, so ist $S = a r^n$. Diese Formel giebt ferner $a = \frac{S}{r^n}$, und $r^n = \frac{S}{a}$, also $r = \sqrt[n]{\frac{S}{a}}$, durch welche Gleichungen man das Kapital oder den Zinsfuß finden kann, wenn die andern 3 Stücke gegeben sind. Was aber n oder die Zeit betrifft, die das Kapital ausgestanden, so giebt es keine algebraische Gleichung, die dazu führt, wie dies überhaupt Statt findet, wenn in einer Gleichung ein Exponent unbekannt ist. Man muß daher von der algebraischen Gleichung $S = a r^n$ zur verwandten logarithmischen übergehn. Man erinnere sich zu diesem Ende:

1. Daß gleiche Größen gleiche Logarithmen haben.

2. Daß der Logarithmus eines Productes der Summe der Logarithmen der Faktoren gleicht, aus welchen das Product gebildet ist.

3. Daß man daher den Logarithmus einer Potenz findet, wenn man den Log. der Wurzel mit dem Exponenten multiplizirt.

Man hat demnach $\log. S = \log. (a r^n) = \log. a + \log. r^n = \log. a + n \log. r$.

9) Die eben gefundene Gleichung zeigt nun an, daß der Log. der zurückzuzahlenden Summe jedes Jahr um eine gleiche Größe zunimmt, nämlich um log. r, wodurch die Aufgaben der Zinszinsrechnung eine gewisse Analogie mit denen der gemeinen Zinsrechnung erhalten, bei welchen die zurückzuzahlende Summe selbst, nicht ihr Log., jedes Jahr um eine gleiche Größe zunimmt, nämlich um $\frac{a\,p}{100}$, s. §. 1.

Man hat nun folgende einfachen Regeln, um jede der 4 Größen a, p, n, S zu finden, wenn die 3 andern gegeben sind:

Um den Log. der zu entrichtenden Summe zu finden, addirt man zum Log. vom Kapital den Log. der vom Zinsfuß abhängigen Größe r, multiplizirt mit der Anzahl der Jahre, die das Kapital ausgestanden.

Um den Log. des Kapitals zu finden, subtrahirt man vom Log. der zurückzuzahlenden Summe den Log. der Größe r, multiplizirt mit der gegebenen Anzahl von Jahren.

Um den Log. der vom Zinsfuß abhängigen Größe r zu finden, subtrahirt man vom Log. der zurückzuzahlenden Summe den Log. des Kapitals, und dividirt das Herauskommende durch die gegebene Anzahl der Jahre.

NB. Wenn man r hat, so findet man den Zinsfuß p selbst durch die Gleichung $r = \frac{100 + p}{100}$, also $100\,r = 100 + p$ und $p = 100\,r - 100$.

Um die Anzahl der Jahre zu finden, die das Kapital ausgestanden, zieht man den Log. des Kapitals vom Log. der zurückzuzahlenden Summe ab, und dividirt das Herauskommende durch den Log. von r.

10) Diesen vier Regeln entsprechen folgende vier Formeln:

$$\log. S = \log. a + n \log. r,$$
$$\log. a = \log S - n \log r,$$
$$\log r = \frac{\log. S - \log. a}{n},$$
$$n = \frac{\log S - \log. a}{\log. r}.$$

Diese Formeln finden übrigens nicht nur bei Zinszinsrechnungen ihre Anwendung, sondern überhaupt, wo eine Größe in begränzten Zeiträumen nach einem geometrischen Verhältnisse zu- oder abnimmt, wovon weiter unten einige Beispiele gegeben werden.

Anwendungen der hier bewiesenen Formeln.

A. Berechnung der zurückzuzahlenden Summe.

Formel $\log. S = \log. a + n \log. r$.

11) Wie viel hat man von 4850 fl. nach 12 Jahren à 5 $\frac{0}{0}$ für Kapital nebst Zinsen zu zahlen?

Hier ist $a = 4850$, $r = \frac{105}{100}$, $n = 12$, also

$$\log. a = 3,6857417$$
$$n \log. r = 12 \log. \frac{105}{100} = 12 . 0,0211893 = 0,2542716$$
also $\log. S = \log. a + n \log. r = 3,9400133$
$$S = 8709,9$$

Zu welcher Summe wachsen 2368 fl., die à $4\frac{1}{2}$ %, ausstehen, in 18 Jahren an?

Hier ist $a = 2368$, $r = \frac{104\frac{1}{2}}{100} = \frac{209}{200}$, $n = 18$, also

$$\log. a = 3,3745817$$

$$n \log. r = 18 . \log. \frac{209}{200} = 18.0,0191163 = 0,3440934$$

$$\log. S = \log. a + n \log. r = 3,7186751$$

$$S = 5229,6$$

12) Es ist schon früher bemerkt worden, daß die Formeln der Zinszinsrechnung nur dann strenge richtig sind, wenn n eine ganze Zahl ist. Die Ursache hievon ist leicht begreiflich; der Exponent der Potenz von r, mit welcher man a multipliziren muß, um die zurückzuzahlende Summe zu finden, nimmt zwar mit jedem Jahre um ein Ganzes zu; aber nicht in einem halben Jahre um $\frac{1}{2}$ rc. Für ein halbes Jahr z. B. hat man $\frac{p}{2}$ % Zins zu zahlen, man hat also den Stand der Schuld am Anfange des halben Jahres mit

$\frac{100 + \frac{p}{2}}{100} = \frac{200 + p}{200}$ zu multipliziren, nicht aber mit $r^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{100 + p}{100}}$, wodurch allein der Exponent von r um $\frac{1}{2}$ steigen würde.

Der gefundene Faktor $\frac{200 + p}{200}$ wird für $\frac{1}{3}$ Jahr $\frac{300 + p}{300}$ und überhaupt für $\frac{t}{u}$ Jahr

$$\frac{100 + \frac{tp}{u}}{100} = \frac{100\,u + t\,p}{100\,u}.$$ Wenn also ein Kapital zu p $\frac{o}{o}$ während $n + \frac{t}{u}$ Jahre ausgestanden, so hat man $S = a\,r^n . \frac{100 + t\,p}{100\,u}$, oder setzt man $k = \frac{t}{u}$, $S = a\,r^n . \frac{100 + k\,p}{100}$. Diese Formel ist schon sehr verwickelt und hat noch außerdem das Nachtheilige, daß sie, besonders wenn p gesucht wird, keine Anwendung der Logarithmen gestattet. Es wird daher ihr Gebrauch möglichst vermieden, und es soll bei einzelnen Aufgaben gezeigt werden, wie dies, ohne der Richtigkeit der Resultate Abbruch zu thun, geschehen könne.

13) Wie viel hat man für 7650 fl. zu zahlen, die man 12 Jahr 5 Monat à 4 $\frac{3}{4}$ $\frac{o}{o}$ mit Zinszinsen in Händen hat?

Hier berechne man durch die Formel $S = a\,r^n$ zuerst, wie viel man nach 12 Jahren zu zahlen habe; es ist dann

$$a = 7650,\ r = \frac{104\frac{3}{4}}{100} = \frac{419}{400},\ n = 12,$$ also

$$\log. a = 3{,}8836614$$

$$n \log. r = 12 . \log. \frac{419}{400} = 12 . 0{,}0201540 = 0{,}2418480$$

$$\log. a + n \log. r = 4{,}1255094$$

$$S = 13350{,}8.$$

Es bleibt nur noch zu rechnen übrig, wie viel 13350,8 in 5 Monaten à $4\frac{3}{4}\frac{0}{0}$ tragen. Man bedient sich hiezu, wie gewöhnlich, der Regelquinque, wie in folgendem Ansatze zu sehen ist:

Wenn 100 fl. in 12 Monaten 5 fl. tragen, wie viel tragen 13350,8 fl. in 5 Monaten?

Man erhält hiedurch für die 5 monatlichen Zinsen 278,14; die zurückzuzahlende Summe ist also $13350,8 + 278,14 = 13628,94$.

Es verwendet Jemand 12600 fl. zu einem Geschäfte und erleidet jährlich $2\frac{0}{0}$ Verlust. Wie viel wird er nach 15 Jahren übrig haben?

Hier ist $a = 12600$, p ist negativ und $= -2$, daher $r = \frac{100-2}{100} = \frac{98}{100}$, $n = 15$. Da $r < 1$, so ist der Logarithmus von r negativ, mithin wird der arithmetische Werth von n log. r hier von log. a abgezogen.

$$\log. a = 4{,}1003705$$

$$n \log. r = 15 . \log. \frac{98}{100} = 15 \times -0{,}0087739 = 0{,}1316085$$

$$\text{also } \log. a + n \log. r = 3{,}9686620$$

$$S = 9303{,}8$$

B. Berechnung des Kapitals.

Formel $\log. a = \log. S - n \log. r$.

14) Welches Kapital wächst in 20 Jahren zu 25600 fl. an, wenn es zu $5\frac{0}{0}$ aussteht?

Hier ist $S = 25600$, $p = 5$, daher $r = \frac{105}{100}$, $n = 20$,

$$\text{also } \log. S = 4{,}4082400$$

$$n \log. r = 20 . \log. \frac{105}{100} = 20 . 0{,}0211890 = 0{,}4237860$$

$$\text{also } \log. S - n \log. r = 3{,}9844540$$

$$a = 9648{,}4$$

Welches Kapital muß 24 Jahr à $5 \frac{1}{4} \frac{0}{0}$ ausstehen, um zu 36840 fl. anzuwachsen?

Hier ist $S = 36840$, $p = 5 \frac{1}{4}$, daher

$$r = \frac{105\frac{1}{4}}{100} = \frac{421}{400}, \ n = 24, \text{ also}$$

$$\log. S = 4{,}5663196$$

$$n \log. r = 24 \log. \frac{421}{400} = 24 . 0{,}0222220 = 0{,}5333280$$

$$\log. S - n \log. r = 4{,}0329916$$

$$a = 10792{,}9$$

15) Wie groß muß ein Kapital seyn, welches, nachdem es 12 Jahre 7 Monate à $5 \frac{0}{0}$ ausgestanden, zu 14650 fl. angewachsen ist?

Da hier die Zahl der Jahre durch einen Bruch angegeben ist, so muß man, weil in diesem Falle die Formel nicht streng richtig ist, zuerst berechnen, wie der Stand der Schuld vor 12 Jahren gewesen ist, um nachher durch einen besondern Ansatz das anfängliche Kapital zu bestimmen.

Man hat demnach:

$$S = 14650, \ n = 12, \ r = \frac{105}{100}, \text{ also}$$

$$\log. S = 4{,}1658376$$
$$n \log. r = 12 \log. \frac{105}{100} = 12 . 0{,}0211893 = 0{,}2539716$$
$$\log. S - n \log. r = 3{,}9118660$$
$$a = 8163{,}3$$

Der Stand der Schuld vor 12 Jahren oder 7 Monat nach Ausstellung des Kapitals war also 8163,3 fl. Um nun das anfängliche Kapital zu finden, berechne man zuerst, wie viel $\frac{0}{0}$ für 7 Monat gezahlt werden, durch folgende Proportion:

$12 : 7 = 5 : x = 2\frac{11}{12}$. Bezeichnet man nun das anfängliche Kapital durch A, so ist

$102\frac{11}{12} : 100 = 8163{,}3 : A$ und folglich $A = 7931{,}9$.

C. Berechnung des Zinsfußes.

Formel $\log. r = \frac{\log. S - \log. a}{n}$

16) Zu wie viel $\frac{0}{0}$ müssen 5800 fl. ausstehen, um in 18 Jahren zu 14580 anzuwachsen?

Hier ist $S = 14580$, $a = 5800$, $n = 18$, also

$$\log. S = 4{,}1637575$$
$$\log. a = 3{,}7634280$$
$$\log. S - \log. a = 0{,}4003295$$
$$\frac{\log. S - \log. a}{n} = \frac{\log. S - \log. a}{18} = 0{,}0222405$$
also $r = 1{,}0525$

Um nun den Zinsfuß p zu finden, hat man $r = \frac{100 + p}{100}$ und $p = 100\,r - 100 = 5{,}25$. Die

5800 fl. müssen also ungefähr zu $5\frac{1}{4}$ ausgestellt werden, um in 18 Jahren zu 14580 anzuwachsen.

17) Zu wie viel $\frac{o}{o}$ muß ein beliebiges Kapital ausgestellt werden, um in 15 Jahren sich zu verdoppeln?

Es ist klar, daß, wenn irgend ein Kapital, zu einem bestimmten Zinsfuß ausgestellt, sich in einer angegebenen Zeit verdoppelt, dieser Umstand auch für jedes andre Kapital Statt haben werde. Man kann also hier für eine beliebige Zahl die Aufgabe auflösen, und da es natürlich ist, die einfachste Zahl zu wählen, so sei das Kapital $a = 1$; ferner ist dann $S = 2$ und $n = 15$, also

$$\log. S = 0{,}3010300$$
$$\log. a = 0{,}0000000$$

$$\log. S. - \log. a = 0{,}3010300$$

$$\frac{\log. S - \log. a}{n} = \frac{0{,}3010300}{15} = 0{,}0200686$$

$$r = 1{,}0474\text{, } p = 100\,r - 100 = 4{,}74.$$

Es muß also ein Kapital ungefähr à $4\frac{3}{4}\frac{o}{o}$ ausgestellt werden, wenn es sich in in 15 Jahren verdoppeln soll.

Berechnung der Zeit.

Formel $n = \dfrac{\log. S - \log. a}{\log. r}$

18) Wie lange müssen 1250 fl. à $5\frac{o}{o}$ ausstehen, um zu 1800 anzuwachsen?

Hier ist $S = 1800$, $a = 1250$, $r = \frac{105}{100}$, also

$$\log. S = 3{,}2552725$$
$$\log. a = 3{,}0969100$$
$$\log. S - \log. a = 0{,}1583625$$

Man hat ferner $\log. r = 0{,}0211893$, also

$$\frac{\log. S - \log. a}{\log. r} = \frac{0{,}1583625}{0{,}0211893} = 7{,}471.$$

Die 1250 fl. müssen also ungefähr $7 \frac{12}{25}$ Jahr stehen, um mit den Zinsen und Zinszinsen 1800 fl. zu betragen. Dieses Resultat ist aber nicht ganz genau, weil die Formel, wie schon gesagt, nicht strenge genommen werden kann, wenn n eine gebrochene Zahl ist. Da aber die Unrichtigkeit wohl nicht den ganzen Theil des Werthes von n, sondern nur den Bruch betrifft, so kann man diesen auf folgende Weise genau bestimmen. Man berechne zuerst, wie viel aus 1250 fl. wird, wenn sie 7 Jahre stehen. Man hat dann:

$$\log. 1250 = 3{,}0969100$$
$$\log. r = 0{,}0211893, \quad 7 \log. r = 0{,}1483251$$
$$\log. 1250 + 7 \log. r = 3{,}2452351$$

Die zu dem hier gefundenen Logarithmus gehörige Zahl ist $= 1758{,}87$.

Zieht man nun diese Summe von 1800 ab, so findet man 41,13.

Es muß nun berechnet werden, wie lange 1758,87 à 5 $\frac{0}{0}$ ausstehen müssen, um 41,13 Zins zu tragen, welches man nun durch folgenden Ansatz findet:

Wenn 100 fl. in 1 Jahr tragen 5 fl. — wie lange 1758,87 fl. für 41,13

Die Zahlen 100 und 1758,87 müssen hier ihre Stellen gegen einander vertauschen, weil bei gleichen Zinsen die Kapitalien sich umgekehrt gegen einander verhalten, wie die Zeiten, und man findet dann 0,467. Die 1250 fl. müssen also im Ganzen 7,467 Jahre stehen, um mit den zusammengelaufenen Zinsen 1800 fl. zu betragen, welches dem obigen Resultate ziemlich nahe ist.

19) Wie lange muß ein Kapital à 5 $\frac{0}{0}$ ausstehen, um sich durch die anlaufenden Zinsen und Zinszinsen zu verdoppeln?

Hier kann wiederum für a eine beliebige Zahl gewählt werden; man setze demnach $a = 1$, daher $S = 2$; ferner ist $r = \frac{105}{100}$.

Man hat nun:

$$\begin{aligned} \log. S &= 0{,}3010300 \\ \log. a &= 0{,}0000000 \\ \hline \log. S - \log. a &= 0{,}3010300 \end{aligned}$$

also $n = \frac{\log. S - \log. a}{\log. r} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14{,}25.$

Ein Kapital muß also ungefähr $14\frac{1}{4}$ Jahr zu 5 $\frac{0}{0}$ ausstehen, um sich zu verdoppeln. Es folgt hieraus durch einen natürlichen Schluß, daß ein Kapital 4mal so groß wird, wenn es 2mal $14\frac{1}{4} = 28\frac{1}{4}$ Jahren aussteht; es wird 8mal so groß, wenn es 3mal $14\frac{1}{4} = 42\frac{1}{4}$ Jahre, und überhaupt 2^n mal so groß, wenn es $14\frac{3}{4}$ n Jahre aussteht.

Wie lange muß ein Kapital zu 4 $\frac{0}{0}$ ausstehen, um zum dreifachen anzuwachsen?

Setzt man hier ebenfalls $a = 1$, so ist $S = 3$ und $r = \frac{104}{100}$.

Man hat nun

$$\begin{aligned} \log. S &= 0{,}4771213 \\ \log. a &= 0{,}0000000 \\ \hline \log. S - \log a &= 0{,}4771213 \end{aligned}$$

also $n = \frac{\log. S - \log. a}{\log. r} = \frac{0{,}4771213}{0{,}0170333} = 28{,}04.$

Es muß demnach ungefähr 28 Jahr à 4 $\frac{0}{0}$ ausstehen, um sich zu verdreifachen, und es folgt hieraus wie oben, daß ein Kapital in 28n Jahren 3^n mal so groß wird.

Vom Interusurium.

20) Wenn ein Schuldner nach einer bestimmten Zeit eine gewisse Summe zu entrichten verbunden ist, und sich dazu versteht, diese Schuld gleich zu zahlen, so ist es billig, daß der Gläubiger ihn für den Verlust, den er dadurch erleidet, indem er die Summe bis zum Ablauf der Zahlungsfrist hätte ausleihen können, schadlos halte, wobei der landesübliche oder irgend ein anderer Zinsfuß zur Basis genommen wird. Dieser Abzug, den sich der Gläubiger gefallen lassen muß, heißt nun das Interusurium, auch Rabatt und Discont.

Gesetzt A habe an B tausend Gulden in einem Jahre zu entrichten, und sie seyen beide überein=

gekommen, daß A seine Schuld gleich mit 5 $\frac{o}{o}$ Rabatt entrichte; es wird nun gefragt, wie viel A zu zahlen habe.

Es ist sicher, daß, wenn die Schuld 105 fl. wäre, A nicht mehr als 100 fl. zu zahlen brauchte, indem er sich für diese Summe hätte 105 fl. auf's Ende des Jahres verschaffen können, wenn er sie ausgeliehen hätte. Man erhält demnach die verlangte Zahl durch die Proportion:

$$105 : 100 = 1000 : x = 952{,}38.$$

21) Es könnte anfangs scheinen, daß A statt der hier gefundenen Summe nur 950 fl. zu zahlen brauchte, weil 1000 fl. in einem Jahre zu 5 $\frac{o}{o}$ 50 fl. tragen; hiebei würde sich aber in der That der Gläubiger beeinträchtigt finden, denn er müßte für 950 fl., die er jetzt empfängt, auf 1000 fl., die er am Ende des Jahres einzunehmen hat, Verzicht thun, d. h. er müßte 950 auf ein Jahr mit 50 fl., oder 95 fl. mit 5 fl. verzinsen, indeß er der Uebereinkunft gemäß nur für 100 fl. jährlich 5 fl. zu zahlen braucht. Das Fehlerhafte dieser Rechnungsart stellt sich noch deutlicher heraus, wenn man mit strenger Consequenz den Rabatt für mehrere Jahre zu einfachen Zinsen berechnen wollte, denn für 20 Jahre wäre der Rabatt 20mal der jährliche Zins, welcher bei 5 $\frac{o}{o}$ der 20te Theil des Kapitals ist, und der Gläubiger würde demnach für seine Foderung gar nichts erhalten, indeß ihm die Hälfte der Foderung gebührt, weil diese Hälfte sich, bei einfachen Zinsen, erst in 20 Jahren ver-

doppelt. Es ist indessen zu bemerken, daß, dessen ungeachtet in der kaufmännischen Welt, vornehmlich bei Wechseln, die letzte Rechnungsart allgemein üblich ist. Der Gläubiger hat sich dabei über keine Beeinträchtigung zu beklagen, weil der Wechselrabatt oder Discont keineswegs durch den landesüblichen Zinsfuß bestimmt wird, und überhaupt dabei keine Rücksicht auf den Nutzen genommen wird, den man durch Ausleihung aus den Kapitalien ziehen kann, sondern auf die mannigfaltigen Verhältnisse, die im merkantilischen Leben eintreten, durch welche die Lebhaftigkeit des Handels beständigen Fluctuationen unterworfen ist. Auch ist hier nicht zu befürchten, daß der Rabatt bei einer langen Zahlungsfrist allzugroß werden möchte, indem diese bei Wechseln sich selten über ein Jahr hinaus erstreckt.

22) Wie groß ist der Rabatt zu p $\frac{o}{o}$ in einfachen Zinsen für a Gulden, die nach n Jahren zahlbar sind?

Die Zinsen von 100 fl. für ein Jahr sind hier p, und für n Jahre np; wäre also die nach n Jahren zahlbare Schuld 100 + np, so wäre der jetzige Werth 100; man findet demnach die verlangte Zahl durch folgende Proportion:

$$100 + np : 100 = a : x = \frac{100\,a}{100 + np}.$$

Beispiel. Wie viel ist der jetzige Werth von 12500, die nach 25 Jahren zahlbar sind, wenn der Rabatt à 5 $\frac{o}{o}$ zu einfachen Zinsen gerechnet wird?

Hier ist a = 12500, p = 5, n = 25, der verlangte Werth ist also $\frac{12 . 50000}{125} = 10000$.

23) Was Rabatt mit Zinszinsen betrifft, so hat man für dessen Berechnung die Formel §. 10. log. a = log. S — n log. r, durch welche man das Kapital a findet, welches sich in n Jahren zu p $\frac{o}{o}$ mit Zinszinsen zu einer Summe = S erhebt, denn es ist klar, daß ein solches Kapital zugleich der jetzige Werth einer nach n Jahren zahlbaren Summe S ist.

Beispiel. Was ist der jetzige Werth von 12500 fl., die nach 25 Jahren zahlbar sind, wenn der Rabatt zu 5 $\frac{o}{o}$ mit Zinszinsen gerechnet wird?

Hier ist S = 12500, n = 25, r = $\frac{105}{100}$, also

$$\log. S = 4{,}0969100$$
$$n \log. r = 25 . 0{,}0211893 = 0{,}5297325$$
$$\log. S - n \log. r = 3{,}5671775$$
$$a = 3691{,}28$$

Von Stückzahlungen.

24) A leiht an B 6500 fl. Daran zahlt ihm B 3000 fl. nach 2 Jahren, und 5 Jahr später 2500 fl. Vier Jahre später will B die Schuld gänzlich tilgen; man fragt, wie viel er zu zahlen habe, wenn Zinszinsen gerechnet werden. (Sowohl hier als in den folgenden Aufgaben ist der Zinsfuß immer 5 $\frac{o}{o}$, wenn nicht ausdrücklich ein anderer Zinsfuß angegeben wird).

Sucht man zuerst den Stand der Schuld nach 2 Jahren, so hat man:

$$\log. 6500 = 3{,}8129134$$

$$2 \log. \frac{105}{100} = 2 \cdot 0{,}0211893 = 0{,}0423786$$

$$\log. 6500 + 2 \log. \frac{105}{100} = 3{,}8552920$$

Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl ist =
= 7166,25

Hieran zahlt B	3000,00
bleiben	4166,25

Man sucht nun, wie viel B für diese Summe 5 Jahr später schuldig ist.

$$\log. 4166{,}25 = 3{,}6197453$$

$$5 \log. \frac{105}{100} = 5 \cdot 0{,}0211893 = 0{,}1059465$$

$$\log. 4166{,}25 + 5 \log. \frac{105}{100} = 3{,}7256918$$

Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl ist =
= 5317,31

Hieran zahlt B	2500,00
bleiben	2817,31

Diese Summe behält nun B noch 4 Jahre in Händen, und es muß nun noch berechnet werden, zu wie viel sie in dieser Zeit anwächst.

$$\log. 2817{,}31 = 3{,}4498346$$

$$4 \log. \frac{100}{105} = 4 \cdot 0{,}0211893 = 0{,}0847572$$

$$\log. 2817{,}31 + 4 \log. \frac{105}{100} = 3{,}5345918$$

Die zu diesem Log. gehörige Zahl 3424,46 giebt endlich an, wie viel B noch zu zahlen habe, um die Schuld zu tilgen.

25) Diese Aufgabe könnte auch auf folgende Weise aufgelöst werden.

Man betrachtet die von B geleisteten Zahlungen als Kapitalien, die er A geliehen, und berechnet, wie viel er beim Schluß der Rechnung für diese Kapitalien nebst Zinszinsen zu fodern habe, welche Summe dann vom Betrag der ihm geliehenen 6500 nebst angelaufenen Zinsen für 11 Jahre (als welcher Zeitraum zwischen der Aufnahme des Kapitals und dem Schlusse der Rechnung verstrichen ist) abgezogen wird, wodurch sich dann herausstellt, wie viel B noch zu zahlen schuldig sey.

Wenn man diese Berechnung ausführt, so findet man:

für 6500 fl., die 11 Jahre stehen 11117,2

Dagegen rechnet B:

für 3000 auf 9 Jahr 4653,99

für 2500 auf 4 Jahr 3038,77

7696,72

bleiben 3424,44

26) Diese Uebereinstimmung der Resultate beider Berechnungsarten findet jedoch nur bei Zinszinsen Statt; bei einfachen Zinsen hingegen, ergiebt sich schon bei mäßigen Summen ein bedeutender Unterschied, wie in folgendem Beispiel zu sehen:

B leiht von A 1000 fl. zu 5 % ohne Zinszinsen; zahlt daran 400 fl. nach drei Jahren, eben so viel

nach sechs Jahren, und will die ganze Schuld am Ende des 8ten Jahres tilgen; wie viel hat er noch zu zahlen?

Erste Auflösung.

Das Kapital ist	1000	fl.
Zinsen für 3 Jahr . . .	150	—
Summe	1150	—
Daran zahlt B	400	—
Bleiben	750	—
Hievon die dreijähr. Zinsen	112,5	—
Summe	862,5	—
Daran zahlt B	400,0	—
Bleiben	462,5	—
Hievon die zweijähr. Zinsen	46,25	—
B hat also noch zu zahlen	508,75	fl.

Zweite Auflösung.

A berechnet 1000 fl. nebst Zinsen von 8 Jahren zu 5 % = 1400.

Dagegen rechnet B 400 fl. nebst 5jähr. Zinsen = 500
400 fl. nebst 2jähr. Zinsen = 440

Summe 940

B hätte demnach zu zahlen 1400 fl. — 940 = = 460 fl.

27) Der bedeutende Unterschied, der sich hier zwischen beiden Resultaten herausstellt, rührt davon her, daß bei der ersten Auflösung ein Theil der

Stückzahlungen nicht zur Tilgung des Kapitals, sondern der rückständigen Zinsen verwendet werden, wodurch der ganze jedesmalige Rest verzinst werden muß, als zum Kapital gehörig. In der zweiten Auflösung hingegen geschieht stillschweigend das Gegentheil, weil B jedesmal die ganzen 400 fl. als ein dem Gläubiger vorgeschossenes Kapital verrechnet, indem auch der für rückständige Zinsen schuldige Theil der Stückzahlung verzinst wird. Aus dieser Erörterung geht übrigens hervor, daß die erste Auflösung, welche im Interesse des Gläubigers ist, allein befolgt werden muß.

Diese Rechnung erleidet indessen eine Modification, wenn die Stückzahlungen nicht wie in voriger Aufgabe die rückständigen Zinsen überschreiten, sondern geringer sind, in welchem Falle nur derjenige Theil des Restes, welcher zum anfänglichen Kapitale gehört, nachher verzinst wird, worüber hier ein Beispiel folgt.

28) B leiht von A 1000 fl. zu einfachen Zinsen, und zahlt daran 80 fl. nach 2 Jahren, 70 fl. nach 7 Jahren und 480 fl. nach 9 Jahren. Wie viel hat B zu zahlen, wenn er am Ende des 12ten Jahres die Summe tilgen will?

	Kapit.	Zins.
B schuldet hier gleich am Ende d. 2. J.	1000	100
Zahlt daran	—	80
Bleiben	1000	20
Das Kapital trägt in den folg. 5 J.	—	250
Summe	1000	270
Daran zahlt B	—	70
Bleiben	1000	200
Das Kapital trägt in den folg. 2 J.	—	100
Summe	1000	300
Daran zahlt B	180	300
Bleiben	820	—
820 fl. tragen in 3 Jahren	—	123
Summe	800	123

B hat also noch zu zahlen 820 fl. + 123 = 943 fl.

29) In den bisherigen Aufgaben sind die Stückzahlungen immer nach einer ganzen Zahl von Jahren geleistet worden. Die Rechnung kann aber wiederum eine Veränderung erleiden, wenn solche Zahlungen in der Mitte des ersten oder der darauf folgenden Jahre geschehen. Geschieht die Zahlung z. B. in der Mitte des ersten Jahres, so ist der Gläubiger nicht berechtigt, das Gezahlte von den rückständigen Zinsen abzuziehen, sondern es wird ein Theil des Kapitals getilgt, weil die Zinsen in der Mitte des Jahres noch nicht abgefodert werden können. Dieselbe Bemerkung gilt, wenn eine

Stückzahlung in der Mitte eines der folgenden Jahre gemacht wird, und keine rückständige Zinsen von den frühern Jahren zu fodern sind. Zur Erläuterung diene das einfache Beispiel, wo B von A 1000 fl. auf ein Jahr nimmt, und nach 6 Monaten 500 fl. zahlt. Nach der 2ten Auflösung §. 25 würden 25 fl. zur Tilgung der halbjährigen Zinsen von 1000 fl. genommen werden, B bliebe also 525 fl. schuldig, wofür er am Ende des Jahres 538,125 zu zahlen hätte; nach obiger Bemerkung aber werden die 500 fl. ganz vom Kapital abgerechnet, und B zahlt am Ende des Jahres die übrigen 500 fl. nebst den halbjährigen Zinsen von 500 fl. und den halbjährigen Zinsen von 1000 fl., welches zusammen nur 537,5 beträgt.

Aufgaben zur Uebung.

28) Ein Waldrevier, dessen gegenwärtiger Bestand 1750 Klafter ist, und jährlich um 3 $\frac{0}{0}$ zunimmt, soll in 25 Jahren gerottet werden. Wie viel ist der jetzige Werth des Holzes, wenn ein Klafter 8 fl. kostet, und 4 $\frac{0}{0}$ Rabatt bewilligt werden.

Zuerst werde bestimmt, wieviel Klafter der Wald in 25 Jahren liefern werde. Es ist

$$\log. 1750 = 3{,}2430300$$

$$25 \log. \frac{103}{100} = 25 \,.\, 0{,}0128372 = 0{,}3209300$$

$$\log. 1750 + 25 \log. \frac{103}{100} = 3{,}5639780$$

Die hiezu gehörige Zahl ist = 3664,1, welche mit 8 multiplizirt, für den Werth des Holzes in

25 Jahren 29312,8 fl. giebt. Um nun den jetzigen Werth dieser Summe zu finden, hat man

$$\log. 29312,8 = 4,4670574$$

$$25 \log. \frac{104}{100} = 25 . 0,0170333 = 0,4258325$$

$$\log. 1750 - 25 \log. \frac{104}{100} = 4,0412249$$

Die Zahl für diesen Log. ist = 10995,7 und giebt den verlangten jetzigen Werth des in 25 Jahren zu fällenden Holzes an.

29) Jemand der ein Gut veräußern will, findet zwei Käufer: der eine bietet 8500 fl. baar und 7500 fl. in einem unverzinslichen Schuldschreiben auf 3 Jahre; der andere will für den ganzen Kaufschilling ein ebenfalls unverzinsliches Schuldschreiben auf 7 Jahre geben. Von welcher Summe muß dieses Schuldschreiben seyn, wenn das Anerbieten des zweiten Käufers dem des ersten gleich kommen soll?

Man berechne zuerst den jetzigen Werth der 7500 fl., welche der erste Käufer nach 3 Jahren zahlen will. Es ist

$$\log. 7500 = 3,8750613$$

$$3 \log. \frac{105}{100} = 3 . 0,0211893 = 0,0635679$$

$$\log. 7500 - 3 \log. \frac{105}{100} = 3 8114934$$

Die Zahl zu diesem Log. ist = 6478,78. Das Gebot des ersten Käufers ist also =
= 8500 + 6478,78 = 14978,78. Das Gebot des zweiten Käufers muß denselben jetzigen Werth haben, wenn es dem des ersten gleich kommen soll.

Es ist demnach zu berechnen, wie groß eine in 7 Jahren zahlbare Summe seyn müsse, damit ihr jetziger Werth 14978,78 sey. Man hat

$$\log. 14978{,}78 = 4{,}1754758$$

$$7 \log. \frac{105}{100} = 7 \cdot 0{,}0211893 = 0{,}1483251$$

$$\log. 14978{,}78 + 7 \log. \frac{105}{100} = 4{,}3238009$$

Die hiezu gehörige Zahl ist 21076,6, so viel hat der zweite Käufer nach 7 Jahren zu zahlen.

30) Welches Kapital trägt in 12 Jahren 3600 fl. für Zinsen und Zinszinsen, wenn es zu 5 $\frac{0}{0}$ aussteht?

Bezeichnet man das Kapital durch x, so wächst es in 12 Jahren zu $x\left(\frac{105}{100}\right)^{12}$ an, die Zinsen ohne das Kapital sind also $x\left(\frac{105}{100}\right)^{12} - x$; man hat also die Gleichung $x\left(\frac{105}{100}\right)^{12} - x = 3600$, oder $x\left(\left(\frac{105}{100}\right)^{12} - 1\right) = 3600$, daher

$$x = \frac{3600}{\left(\frac{105}{100}\right)^{12} - 1} = \frac{3600}{1{,}7958 - 1} = \frac{3600}{0{,}7958} =$$

$= 4523{,}7$ fl.

31) Wie lange müssen 45000 fl. zu 5 $\frac{0}{0}$ ausstehen, wenn die Zinsen 8000 fl. betragen sollen?

Wenn die Zinsen allein 8000 fl. betragen, so sind Kapital und Zinsen zusammen $53000 = S$, ferner ist $a = 45000$, $r = \frac{105}{100}$; man hat nun

$$\log. S = 4{,}7242759$$
$$\log. a = 4{,}6812412$$
$$\log. S - \log. a = 0{,}0430347$$

also die Zahl der Jahre $= \frac{\log. S - \log. a}{\log. r} =$
$= \frac{0{,}0430347}{0{,}0211893} = 27.$

32) Der im Königreich Baiern vom Freiherrn von Aretin in Vorschlag gebrachte Creditverein setzt folgende Bestimmungen fest in Beziehung auf die, welche Anleihen nehmen:

« Die Besitzer von Realitäten erhalten, sobald sie eine Hypothek von 20000 fl. oder von noch höherem Werthe unterstellen können, die Hälfte des Hypothekenwerthes in klingender Münze ohne Rückzahlungsverbindlichkeit, doch so, daß sie das Kapital die ersten 6 Jahre lang zu 5 $\frac{o}{o}$, wovon das 5tel als Provision vorausbezahlt wird, und die übrigen 44 Jahre durch zu 4 $\frac{o}{o}$ verzinsen. Sie können während dieses Zeitraums nicht austreten, wenn sie nicht einen Substituten stellen. »

Es soll hier untersucht werden:

1) ob der Verein bei diesen Bedingnissen bestehen könne,

2) wie viel $\frac{o}{o}$ die Inhaber der Actien jährlich aus ihren dem Vereine vorgeschossenen Fonds ziehen.

So vortheilhaft diese Bestimmungen für die Anleihennehmer scheinen und auch wirklich sind, so findet doch die Kasse ihre Rechnung vollkommen dabei, und zwar eben durch die großen Vortheile,

welche die Anstalt den Anleihennehmern gewährt, denn diese machen eine beständige Umsetzung der eingegangenen Zinsen, als neue Kapitalien möglich und wahrscheinlich, wodurch der angelegte Stock sich mit jener Schnelligkeit vermehrt, die man bisher bei Zinszinsen zu bemerken Gelegenheit hatte. Um die Berechnung zu erleichtern, kann man annehmen, daß das 5te $\frac{0}{0}$, welches für die ersten 6 Jahre vorausbezahlt wird, zur Deckung der Verwaltungskosten bestimmt sey, und daher der ganze Stock zu 4 $\frac{0}{0}$ mit Zinszinsen 50 Jahre ausstehe; es ist also hier eigentlich die Frage, zu wie viel 100 fl. anwachsen, wenn sie 50 Jahre zu 4 $\frac{0}{0}$ ausstehen. Man hat

$$\log. 100 = 2{,}0000000$$

$$50 \log. \frac{104}{100} = 50 \,.\, 0{,}0170333 = 0{,}8516650$$

$$\log. 100 + 50 \log. \frac{105}{100} = 2{,}8516650$$

Die hiezu gehörige Zahl ist = 710,66, wodurch man sieht, daß das Kapital mehr als 7mal so stark wird; da aber dem Plan gemäß keine Rückzahlung der Anleihen Statt findet, so werden die angelegten 100 fl. nur 610,66, der reine Gewinn für 50 Jahre ist also = 510,66, und für ein Jahr etwa 10 $\frac{0}{0}$.

Aufgaben, bei welchen die Formeln der geometrischen Progression angewendet werden.

33) Ein Vormund erhält bei Uebernahme der Vormundschaft ein baares Kapital von 30,000 fl. und außerdem ein Gut, das jährlich 1500 fl. abwirft. Wie viel hat er nach einer 12jährigen Verwaltung den Pupillen auszuzahlen, wenn er für diese jährlich 800 fl. auszugeben hatte?

Man findet zuerst, daß das Kapital von 30000 fl. in 12 Jahren zu 53875,7 anwächst. Der Vormund hat außerdem eine jährliche Einnahme von 1500 fl. — 800 = 700 fl., welches den Zinsen eines Kapitals von 14000 fl. entspricht. Ein solches Kapital wächst in 12 Jahren zu 25142,6 an; da aber der Vormund das entsprechende Kapital nicht erhalten hat, so hat er nur 25142 fl. — 14000 fl. = 11142 zu zahlen, welches mit den obigen 53875,7 fl. eine Summe von 65051,7 beträgt.

34) Etwas weitläufiger ist die Auflösung mit Hülfe der geometrischen Progression. Man denkt sich dabei die am Ende jedes Jahres erhaltenen 700 fl. als eben so viele verzinslichen Kapitalien. Für die 700 fl., welche der Vormund am Ende des ersten Jahres eingenommen, hat er bei der Rechnungsablage $700 \left(\frac{105}{100}\right)^{11}$ zu zahlen, für die am Ende des 2ten Jahres $700 \left(\frac{105}{100}\right)^{10}$ u. s. f., also im Ganzen die Summe $u = 700 + 700 \frac{105}{100} +$

$$+ 700 \left(\frac{105}{100}\right)^2 + \text{ꝛc.} + 700 \left(\frac{105}{100}\right)^{11} =$$

$$= \frac{700 \left(\left(\frac{105}{100}\right)^{12} - 1 \right)}{\frac{105}{100} - 1} = \frac{700 \left(\left(\frac{105}{100}\right)^{12} - 1 \right)}{\frac{1}{20}}$$

$$= 14000 \left(\left(\frac{105}{100}\right)^{12} - 1 \right) = 14000 (1{,}79585 - 1)$$

$= 14000 \,.\, 0{,}79585 = 11141{,}9$. Man sieht, daß die hier vorgenommenen Operationen eigentlich dieselben sind, zu welchen in der ersten Auflösung andere Betrachtungen geführt haben, welche auch in der Folge, so oft es thunlich ist, angewendet werden sollen.

35) A leihet von B 15000 fl., und zahlt 20 Jahre nach einander am Ende jedes Jahres 950 fl. Wie viel beträgt die Schuld noch am Ende des 20ten Jahres?

Am Ende des 20ten Jahres hat A für die ihm geliehenen 20000 fl. nebst den angelaufenen Zinsen 39790,3 zu zahlen. Die jährlich von ihm abgezahlten 950 fl. entsprechen einem Kapitale von 19000 fl., man kann sich also denken, B habe von A die Nutznießung von 1900 fl. während 20 Jahre erhalten. Um den Werth dieser Nutznießung zu bestimmen, muß man rechnen, zu welcher Summe 19000 fl. in 20 Jahren anwachsen und nachher 19000 fl. davon abziehen. 19000 fl. werden in 20 Jahren 50401 fl., man kann also annehmen, B habe von A erhalten 50401 fl. — 19000 = 31400. A hat also an B zu zahlen 39790,3 — 31400 = 8390,3.

A leihet von B 8500 fl. auf 16 Jahre und giebt ihm zum Unterpfande ein nutzbares Gut, welches jährlich 250 fl. abwirft. Wie viel hat A am Ende des 16ten Jahres zu zahlen?

Die 8500 fl. werden am Ende des 16ten Jahres mit den angelaufenen Zinsen 18554,4 fl. Der Kapitalwerth des nutzbaren Gutes ist 5000 fl. Ein solches Kapital wächst in 16 Jahren zu 10914,3 fl. an, man kann also wie in der vorigen Aufgabe annehmen, B habe von A 10914,3 — 5000 = 5914,3 fl. erhalten, und A hat demnach zu zahlen 18554,4 fl. — 5914,3 fl. = 12640,1.

37) Es bieten sich zu einem Gute, welches veräußert werden soll, zwei Käufer an. Der erste will 12 Jahre nach einander am Ende jedes Jahres 650 fl. ohne Zinsen dafür geben, und der zweite will 3000 fl. baar und 12 Jahre nach einander am Ende jedes Jahres 450 fl. ebenfalls ohne Zinsen zahlen. Welches Gebot ist hier das vortheilhafteste, und wie viel ist der Unterschied?

Der erste Käufer bietet hier die Nutznießung von 20 × 650 fl. = 13000 fl. auf 12 Jahre. Da nun 13000 fl. in 12 Jahren zu 22814,6 fl. anwachsen, so ist sein Gebot auf 22814,6 fl. — 13000 fl. = 9814,6 fl. zahlbar nach 12 Jahren anzuschlagen. Der zweite Käufer bietet die Nutznießung von 20 × 450 = 9000 fl. auf 12 Jahre, aber 9000 fl. werden in 12 Jahren 15794,8 fl.; die angebotene Nutznießung ist also 15794,8 — 9000 = 6794,8 fl. Der zweite Käufer bietet noch außerdem 3000 fl. baar, deren Werth

nach 12 Jahren 5264,93 fl. ist, und folglich beträgt sein ganzes Anerbieten 6794,8 fl. + 5265,93 = = 12060,73 fl., die in 12 Jahren zahlbar sind, und ist demnach weit vortheilhafter als dasjenige des ersten Käufers.

38) Ein Staat nimmt ein Anleihen von 15000000 fl. auf und legt zur Tilgung dieser Schuld eine Tilgungskasse an, die jährlich 1200000 fl. erhält, um damit die laufenden Zinsen zu zahlen, und das Uebrige mit Zinszinsen auszuleihen. Wie viel wird diese Tilgungskasse nach 30 Jahren auszahlen können?

Da die jährlichen Zinsen des aufgenommenen Kapitals 750000 fl., so ist der eigentliche Tilgungsfond nur eine jährliche Einnahme von 450000 fl. oder die Nutznießung von 9000000 fl.; aber 9000000 werden in 20 Jahren 23834762 fl. Es bleiben also nach Auszahlung der ganzen Schuld noch 3834765 fl. übrig.

39) Es hat Jemand 24 Jahre nach einander am Ende jedes Jahres 800 fl. einzunehmen, und wünscht dieses Einkommen zu veräußern. Wie viel hat er bei 4 % Rabatt dafür zu erhalten?

Bei 4 % entspricht eine immerwährende jährliche Einnahme von 800 fl. einem Kapital von 25 × 800 fl. = 20000 fl.; wenn daher von einem immerwährenden Einkommen die Rede wäre, so wäre der verlangte Werth 20000 fl., da aber das Einkommen nach 24 Jahren aufhört, so heißt dieß eben so viel, als wenn der Käufer nach Ablauf

dieser Zeit einen Kapitalwerth von 20000 fl. zurückgeben müßte; er hat also für das ihm übertragene Einkommen 20000 fl. weniger den jetzigen Werth von 20000 fl., die in 24 Jahren zahlbar sind, zu zahlen. Um diesen jetzigen Werth zu finden, hat man

$$\log. 20000 = 4,3010300$$

$$24 \log. \frac{100}{104} = 24 \times -0,0170333 = -0,4087992$$

$$\log. 20000 + 24 \log. \frac{100}{104} = 3,8922308$$

Die hiezu gehörige Zahl ist = 7802,4, der Käufer hat also zu zahlen 20000 fl. — 7802,4 = = 12197,6 fl.

Auflösung durch Anwendung der geometrischen Progression.

40) Der jetzige Werth der 800 fl., welche nach 24 Jahren eingehen, ist $800 \left(\frac{100}{104}\right)^{24}$, so ist auch der jetzige Werth der 800 fl., welche nach 23 Jahren eingehen $= 800 \left(\frac{100}{104}\right)^{23}$ u. s. f.

Die 800 fl. endlich, die am Ende des ersten Jahres eingehen, haben jetzt einen Werth von $800 \frac{100}{104}$; bezeichnet man also durch u die verlangte Zahl, so ist $u = 800 \left(\frac{100}{104}\right)^{24} +$

$$+ 800 \left(\frac{100}{104}\right)^{23} + \text{rc.} + 800 \frac{100}{104} = 800 \frac{100}{104} \times$$

$$\left(\left(\frac{100}{104}\right)^{23} + 800 \left(\frac{100}{104}\right)^{22} + \text{rc.} + 1 \right) = 800 \frac{100}{104}$$

$$\cdot \frac{1 - \left(\frac{100}{104}\right)^{24}}{1 - \frac{100}{104}} = 800 \cdot \frac{25}{26} \cdot \frac{1 - \left(\frac{100}{104}\right)^{24}}{\frac{1}{26}} =$$

$$= 800 \cdot 25 \left(1 - \left(\frac{100}{104}\right)^{24}\right) = 2000 \times$$

$(1 - 0{,}390122) = 20000 \; 0{,}609878 = 12197{,}56$, welches Resultat mit dem obigen so genau als möglich übereinstimmt. Man sieht übrigens hiedurch, daß auch bei Berechnung des Interusurium die Anwendung der geometrischen Progression bequem durch andere Betrachtungen ersetzt werden kann.

41) Wie viel ist der jetzige Werth einer Rente, die vom Ende des 9ten bis zum Ende des 16ten Jahres jährlich 1200 einbringt?

Wenn die Rente erst am Anfange des 9ten Jahres veräußert werden sollte, so wäre, nach den in voriger Aufgabe angewendeten Betrachtungen ihr Werth $= 20 \cdot 1200 - 20 \cdot 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{8} = 24000$ $- 24000 \left(\frac{100}{105}\right)^{8} = 24000 - 24000 \cdot 0{,}676839 =$ $= 24000 - 16244{,}136 = 7755{,}864$. Es muß nun berechnet werden, wie viel der jetzige Werth von 7755,864 fl. ist, die in 8 Jahren eingehen. Man hat:

$$\log. 7755{,}864 = 3{,}8896267$$

$$2 \log. \frac{100}{105} = 8 \times -0{,}0211893 = -0{,}1695164$$

$$\log. 7755{,}864 + 8 \log. \frac{100}{105} = 3{,}7201103$$

Die hiezu gehörige Zahl 5249,3 ist der jetzige Werth der zu veräußernden Rente. Wendet man hier die geometrische Progression an, so hat man folgende Reihe zu summiren:

$$u = 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{16} + 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{15} + \text{rc.} +$$

$$+ 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{9}.$$

42) Wie viel ist der Werth eines Gutes, das in den ersten 15 Jahren jährlich 900 fl., nachher aber jährlich 1050 fl. abwirft?

Man kann den Ertrag des Gutes in 2 Theile zerlegt denken:

1. Eine jährliche Einnahme von 900 fl., die gleich anfängt.

2. Eine jährliche Einnahme von 150 fl., die erst in 15 Jahren anfängt.

Die erste Einnahme entspricht einem Kapital von 20 × 900 fl. = 18000; die zweite einem Kapital von 20 × 450 fl. = 3000, die erst in 15 Jahren zahlbar sind, und deren jetziger Werth = 1443,3 fl.; der sämmtliche Werth des Gutes ist also 18000 fl. + 1443,3 = 19443,3 fl.

43) Wie viel ist der Werth von 15000 fl., die in 18 Jahren zahlbar sind und bis dahin mit 4 % verzinst werden?

Hier hat man besonders den jetzigen Werth des Kapitals und den der laufenden Zinsen zu berechnen.

Für den jetzigen Werth des Kapitals hat man:

$$\log. 15000 = 4{,}1760913$$

$$18 \log. \frac{100}{105} = 18 \times -0{,}0211893 = -\ 0{,}3814074$$

$$\log. 15000 + 18 \log. \frac{100}{105} = 3{,}7946839$$

Die hiezu gehörige Zahl 6232,8 entspricht dem verlangten jetzigen Werth der 15000 fl. Was den jetzigen Werth der sämmtlichen Zinsen betrifft, so sind die jährlichen Zinsen von 15000 fl. zu 4 % 600 fl., welche einem Kapital von 20 × 600 fl. = 12000 zu 5 % entsprechen, der jetzige Werth dieser Zinsen ist also die Nutznießung von 12000 fl. während 18 Jahre; um nun den Betrag derselben zu bestimmen, denke man sich, der Käufer erhalte jetzt 12000 fl. baar und müsse sie in 18 Jahren zurückzahlen; nun ist aber der jetzige Werth von 12000 fl. die in 18 Jahren zahlbar sind = 4986,3 fl.; die Benutzung der Zinsen beträgt also 12000 fl. — — 4986,3 = 7013,7, der verlangte Werth des fraglichen Kapitals ist folglich 6232,8 fl + 7013,7 = 13246,5 fl.

Die Auflösung mit Hülfe einer geometrischen Reihe führt hier in Beziehung auf die Zinsen zur Gleichung:

$$u = 600 \left(\frac{100}{105}\right)^{18} + 600 \left(\frac{100}{105}\right)^{17} + \text{rc.} + 600 \frac{100}{105}.$$

44) Es hat Jemand am Ende des 2ten, 4ten, 6ten ... 24ten Jahres jedesmal 800 fl. zu zahlen; unterläßt aber die Ziele regelmäßig abzutragen. Wie viel ist er am Ende des 24ten Jahres zu zahlen schuldig?

Sucht man das Kapital, von welchem man alle 2 Jahre 800 fl. Zinsen zu zahlen hat, so findet man 7804,87; es gebührt also dem Gläubiger die Nutznießnng von 7804 87 während 24 Jahren, oder die Summe, zu welcher obiges Kapital in 24 Jahren anwächst, weniger das Kapital selbst; diese ist aber 25229,5 — 7804,87 = 17424,63, welche Summe der Schuldner am Ende des 24ten Jahres zu zahlen hat.

Löst man diese Aufgabe vermittelst der geometrischen Progression auf, so findet man, wenn die verlangte Summe durch u bezeichnet wird:

$$u = 800 \left(\frac{105}{100}\right)^{22} + 800 \left(\frac{105}{100}\right)^{20} + \text{rc.} + 800.$$

45) Es hat Einer am Ende des 3ten, 6ten, 9ten ... 21ten Jahres jedesmal 1200 fl. zu empfangen, und will dieses Einkommen jetzt gegen den gewöhnlichen Rabatt veräußern; wie viel erhält er dafür?

Der jetzige Werth der 1200 fl., die am Ende des 21ten Jahres eingehen, ist $= 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{21}$ derjenige, der 1200 fl., die am Ende des 18ten Jahres eingehen, ist $= 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{18}$ u. s. f.

Man hat also für den jetzigen Werth der ganzen

$$\text{Rente } u = 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{21} + 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{18} + \text{ꝛc.} + $$
$$+ 1200 \left(\frac{100}{105}\right)^{3}.$$

Diese Aufgabe könnte übrigens wie die vorige aufgelöst werden. Man suche nemlich zuerst, für welches Kapital man nach drei Jahren an Zinsen und Zinszinsen 1200 fl. zu zahlen habe. 100 fl. betragen nach 3 Jahren mit Zinszinsen 115,7625 fl., worunter 15,7625 fl. für Zinsen. Man erhält nun das Kapital für 1200 fl. durch die Proportion 15,7625 : 1200 = 100 : x = 7613; man kann sich also denken, es werde dem Käufer ein Kapital von 7613 fl. auf 21 Jahre überlassen, welches er nach Ablauf dieser Frist zurückzahlen müsse. Nun ist aber der jetzige Werth von 7613 fl., die nach 21 Jahren zahlbar sind = 2609,83; der Käufer hat also zu zahlen 7613 fl. — 2609,83 = 5003,17 fl.

Zielzahlungen.

46) Es ist Jemand 15000 fl. nach 12 Jahren ohne Zinsen zu zahlen schuldig, und wünscht solche, mit Einwilligung des Gläubigers, in 12 gleichen, jährlichen Zielen abzutragen; wie viel hat er jedesmal zu zahlen?

Gesetzt er zahle jedes Jahr x Gulden, so wäre dies für den Gläubiger die Nutznießung von 20 x auf 12 Jahre. Der Werth einer solchen Nutznie-

ßung ist, wie schon bei vielen ähnlichen Fällen gezeigt worden, 20 x vermindert um den jetzigen Werth von 20 x, die nach 12 Jahren zahlbar sind, also $20x - \left(\frac{100}{105}\right)^{12} . 20x$; nun ist aber der jetzige Werth der nach 12 Jahren zahlbaren 15000 fl. $=$

$$= 15000 \left(\frac{100}{105}\right)^{12}$$; es ist also $20x - 20x\left(\frac{100}{105}\right)^{12}$.

$$= 15000 \left(\frac{100}{102}\right)^{12} \text{ oder } 20x\left(1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{12}\right)$$

$$= 15000 \left(\frac{100}{105}\right)^{12}, \text{ und } x = \frac{15000 \left(\frac{100}{105}\right)^{12}}{20\left(1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{12}\right)}$$

$$= \frac{15000 . 0{,}55812}{20\,(1 - 0{,}55812)} = \frac{8371{,}8}{20 . 0{,}44188} = 947{,}2.$$

Auflösung durch die geometrische Progression.

47) Gesetzt, es werde am Ende jedes Jahres x Gulden gezahlt, so kann man annehmen, der Gläubiger erhalte vom Schuldner 12 Kapitalien, jedes von x Gulden, die er ihm nach Verlauf der 12 Jahre nebst Zinsen gegen die 15000 fl. zu verrechnen hat. Die x Gulden, welche er am Ende des ersten Jahres erhält, betragen beim Schlusse der Rechnung $x\left(\frac{105}{100}\right)^{11}$, die am Ende des 2ten Jahres $x\left(\frac{105}{100}\right)^{10}$ u. s. f. Die Summe der 12

Kapitalien nebst Zinsen ist also

$x\left(\left(\frac{105}{100}\right)^{11}+\left(\frac{105}{100}\right)^{10}+ \text{ꝛc.} +1\right)$, und da

durch diese Summe die Schuld von 15000 fl. ausgeglichen wird, so ist:

$$x\left(\left(\frac{105}{100}\right)^{11}+\left(\frac{105}{100}\right)^{10}+ \text{ꝛc.} +1\right)=15000,$$

oder $x.\frac{\left(\frac{105}{100}\right)^{12}-1}{\frac{105}{100}-1}=15000$, $x.\frac{\left(\frac{105}{100}\right)^{12}-1}{1/20}$

$=15000$, $20x\left(\left(\frac{105}{100}\right)^{12}-1\right)=15000$ und

$x=\frac{15000}{20\left(\left(\frac{105}{100}\right)^{12}-1\right)}$. Dieser Werth stimmt mit

dem obigen genau überein, wenn man beide Theile des Bruches mit $\left(\frac{100}{105}\right)^{12}$ multiplizirt, und dabei bemerkt, daß $\left(\frac{105}{100}\right)^{12}.\left(\frac{100}{105}\right)^{12}=1$.

48) Es nimmt Einer 25000 fl. auf, und verspricht die Schuld mit 5 procentiger Vergütung in 8 gleichen jährlichen Zielen abzutragen; wie viel hat er jedesmal zu zahlen?

Wenn er jedes Jahr x fl. zahlt, so entsteht dadurch für den Gläubiger, wie in der vorigen Aufgabe, ein Nutzen von $20x-20x\left(\frac{100}{105}\right)^{8}$;

es ist also $20x - 20x\left(\frac{100}{105}\right)^8 = 25000$, und multiplizirt man die Gleichung mit $\left(\frac{105}{100}\right)^8$, so ist $20x\left(\frac{105}{100}\right)^8 - 20x = 25000\left(\frac{105}{100}\right)^8$, und

$$x = \frac{25000\left(\frac{105}{100}\right)^8}{20\left(\left(\frac{105}{100}\right)^8 - 1\right)} = \frac{36936{,}3}{20\ (1{,}4774 - 1)} =$$

$$= \frac{36936{,}3}{8{,}548} = 4319{,}9.$$

Benützt man hier die Formel der geometrischen Reihe, so muß man durch eine Gleichung ausdrücken, daß der jetzige Werth sämmtlicher Ziele $= 25000$, also:

$$x\left(\frac{100}{105}\right)^8 + x\left(\frac{100}{102}\right)^7 + \text{rc.} + x\frac{100}{105} = 25000,$$

oder $x\ \dfrac{1 - \left(\frac{100}{105}\right)^8}{\frac{105}{100} - 1} = 25000$, $x\ \dfrac{1 - \left(\frac{100}{105}\right)^8}{1/20}$

$= 25000$, $20x\left(\left(\frac{100}{105}\right)^8 - 1\right) = 25000$, also

$= x \longrightarrow \dfrac{25000}{20\left(1 - \left(\frac{100}{105}\right)^8\right)}$, oder, wenn man Zähler und Nenner mit $\left(\frac{105}{100}\right)^8$ multiplizirt

$$x = \frac{25000\left(\frac{105}{100}\right)^8}{20\left(\left(\frac{105}{100}\right)^8 - 1\right)} \text{ wie oben.}$$

49) Es will sich Jemand mit 50000 fl., die er jetzt in eine hiezu bestimmte Kasse niederlegt, eine zwanzigjährige Leibrente machen, die aber erst in 10 Jahren anfangen soll, so daß er am Ende des 11ten Jahres das erstemal die Rente beziehe. Wie stark wird diese Rente seyn?

Die 50000 fl. wachsen in den ersten 10 Jahren zu $50000 \left(\frac{105}{100}\right)^{10}$ an. Gesetzt nun, die Rente sey x Gulden, so erhält der Rentier

$20x - 20x \left(\frac{100}{105}\right)^{20}$ für die $50000 \left(\frac{105}{100}\right)^{10}$

nach 10 Jahren; man hat also:

$$20x - 20x \left(\frac{100}{105}\right)^{20} = 50000 \left(\frac{105}{100}\right)^{10};$$

$$20x \left(1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{20}\right) = 50000 \left(\frac{105}{100}\right)^{10}$$

$$x = \frac{50000 \left(\frac{105}{100}\right)^{10}}{20 \left(1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{20}\right)},$$ oder, wenn man Zähler und Nenner mit $\left(\frac{105}{100}\right)^{20}$ multiplizirt

$$x = \frac{50000 \left(\frac{105}{100}\right)^{30}}{20\left(\left(\frac{105}{100}\right)^{20} - 1\right)} = \frac{216092}{20\,(2{,}6529-1)} =$$

$$= \frac{216092}{20 \,.\, 1{,}6529} = \frac{216092}{33{,}058} = 6538{,}5.$$ Vermittelst der geometrischen Progression findet man eine

Gleichung, wenn man die Summe der sämmtlichen Ziele in ihrem jetzigen Werth der niedergelegten Summe von 50000 fl. gleich setzt; man hat dann $x\left(\frac{100}{105}\right)^{30} + x\left(\frac{100}{105}\right)^{29} +$ ꝛc. $+$

$$+ x\left(\frac{100}{105}\right)^{10} = 50000.$$

50) A ist an B 15 Jahre nach einander am Ende jedes Jahres 900 fl. zu zahlen schuldig; sie kommen aber beide dahin überein, daß die Schuld in 8 Zielen statt in 15 abgetragen werden solle. Wie viel hat A jedesmal zu zahlen?

Der jetzige Werth der 15 Ziele zu 900 fl. ist $= 20 \cdot 900 - 20 \cdot 900\left(\frac{100}{105}\right)^{15}$, und derjenige der 8 Ziele zu x Gulden ist

$$= 20x - 20x\left(\frac{100}{105}\right)^{8};\text{ also}$$

$$20x - 20x\left(\frac{100}{105}\right)^{8} = 20 \cdot 900 - 20 \cdot 900\left(\frac{100}{100}\right)^{15}$$

oder $x\left(1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{8}\right) = 900\left(1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{15}\right)$

folglich $x = \dfrac{900\left(1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{15}\right)}{1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{8}} =$

$$= \frac{900\,(1 - 0{,}48101)}{1 - 0{,}67683} = \frac{900 \cdot 0{,}51899}{0{,}32317} =$$

$= \dfrac{467{,}091}{0{,}32319} = 1445{,}6.$ Die Berechnung vermittelst

der geometrischen Progression geschieht hier durch die Gleichung:

$$x\left(\frac{100}{105}\right)^8 + x\left(\frac{100}{105}\right)^7 + \text{rc.} + x\left(\frac{100}{105}\right) =$$

$$= 900\left(\frac{100}{105}\right)^{15} + 900\left(\frac{100}{105}\right)^{14} +$$

$+ \text{rc.} + 900\left(\frac{100}{105}\right)$. In beiden Progressionen kann man $\frac{105}{100}$ als den beständigen Faktor ansehen,

also $x\,\dfrac{1-\left(\frac{100}{105}\right)^8}{\frac{105}{100}-1} = 900\,\dfrac{1-\left(\frac{100}{105}\right)^{15}}{\frac{105}{100}-1}$,

oder $x\left(1-\left(\frac{100}{105}\right)^8\right) = 900\left(1-\left(\frac{100}{105}\right)^{15}\right)$

wie oben.

51) A hat an B alle 5 Jahre 1200 fl. zu zahlen; sie kommen aber beide überein, daß diese fünfjährige Rente in eine jährige verwandelt werden solle. Wie viel hat nun A jedes Jahr zu zahlen?

Man hat hier zuerst das Kapital zu suchen, das alle 5 Jahre 1200 fl. abwirft, und von diesem Kapital hat dann A jährlich die Zinsen zu entrichten. Bezeichnet man dieses Kapital durch x, so ist nach §. 30. $x = \dfrac{1200}{\left(\frac{105}{100}\right)^5 - 1} = \dfrac{1200}{1{,}2762-1}$

$= \dfrac{1200}{0{,}2762} = 4344{,}6$; die jährlichen Zinsen die-

ser Summe sind $\frac{4344,4}{20} = 217,23$, welche Summe A nun jährlich zu zahlen hat.

Man könnte auch zu diesem Resultat durch folgende geometrische Reihe gelangen:

$$x\left(\frac{105}{100}\right)^4 + x\left(\frac{105}{100}\right)^3 + x\left(\frac{105}{100}\right)^2 +$$
$$+ x\,\frac{105}{100} + x = 1200.$$

52) Es hat Jemand alle 3 Jahre 1800 fl. zu zahlen und kommt mit seinem Gläubiger überein, daß diese 3jährige Rente in eine 2jährige umgeschaffen werden solle. Wie viel hat er nun alle zwei Jahre zu zahlen?

Bezeichnet man wiederum durch x eine Summe, welche in 3 Jahren 1800 fl. für Zinsen abwirft, so hat man

$$x = \frac{1800}{\left(\frac{105}{100}\right)^3 - 1} = \frac{1800}{1,1576-1} = \frac{1800}{0,1576} =$$

$= 11409$. Diese Summe wächst in 2 Jahren zu 12578,4 an; die Zinsen für 2 Jahre sind also $= 12578,4 - 11409 = 1169,9$, welche Summe der Schuldner jetzt alle 2 Jahre zahlen muß.

53) A hat an B am Ende des 3ten, 6ten, 9ten ... 36ten Jahres jedesmal 1500 fl. zu zahlen; versteht sich aber mit seinem Gläubiger dahin, daß diese Rente durch eine einjährige von 25 Jahren ersetzt werden solle. Wie viel hat nun A 25 Jahre nach einander zu zahlen?

Diese Aufgabe ist von den zwei vorigen nur dadurch verschieden, daß die jährige Rente nur 20 Jahr statt 36 dauern soll, denn sonst wäre die Berechnung gerade so, als wenn eine ewige 3jährige durch eine ewige Jahrrente ersetzt werden soll. Für den vorliegenden Fall hat man zuerst zu berechnen, welchem Kapital eine 3jährige Einnahme von 1500 fl. entspricht. Dieses ist $\frac{1500}{\left(\frac{105}{100}\right)^3 - 1} =$ $= \frac{1500}{1,1576 - 1} = \frac{1500}{0,1576} = 9517,7$; es gebührt also dem Gläubiger die Benutzung von 9517,7 fl. während 36 Jahre oder

$$9517,7 - 9517,7 \left(\frac{100}{105}\right)^{36} = 9517,7 - 1648,3 =$$

$= 7869,7$. Bezeichnet man nun die verlangte Zahl durch x, so erhält B die Benutzung von 20 x während 25 Jahre; der Werth einer solchen Benutzung ist aber $20x - 20x \left(\frac{100}{105}\right)^{25}$, man hat also die Gleichung:

$$20x - 20x \left(\frac{100}{105}\right)^{25} = 7869,7, \text{ oder } x - x \left(\frac{100}{105}\right)^{25}$$

$$= 393,48, \text{ daher } x\left(1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{25}\right) = 393,48,$$

und $x = \frac{393,48}{1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{25}} = \frac{393,48}{1 - 0,2953} =$

$= \frac{393,48}{0,7047} = 558,36$ fl., welche Summe A 25 Jahre nach einander zu zahlen hat.

Bedient man sich zur Auflösung dieser Aufgabe der geometrischen Reihe, so erhält man folgende Gleichung:

$$x\left(\frac{100}{105}\right)^{25} + x\left(\frac{100}{105}\right)^{24} + \text{ꝛc.} + x\,\frac{100}{105} = 1500$$

$$\left(\frac{100}{105}\right)^{36} + 1500\left(\frac{100}{105}\right)^{33} + \text{ꝛc.} + 1500\left(\frac{100}{105}\right)^{3}.$$

Bestimmung der Zeit bei Zielzahlungen mit Zinszinsen.

54) Es nimmt Jemand eine Hypothek von 45000 fl. auf seine Güter, und bedingt dabei, daß er jährlich an Kapital nebst Zinsen 3000 fl. zahlen werde. Nach wie viel Jahren wird die Schuld getilgt seyn?

Bezeichnet man die Zahl der Jahre durch x, so ist der jetzige Werth sämmtlicher Ziele

$= 20 \,.\, 3000 - 20 \,.\, 3000 \left(\frac{100}{105}\right)^x$, man hat also

die Gleichung $20 \,.\, 3000 - 20 \,.\, 3000 \left(\frac{100}{105}\right)^x =$

$= 45000$, daher $20.3000 - 45000 = 20.3000 \left(\frac{100}{105}\right)^x$

$60000 - 45000 = 60000 \left(\frac{100}{105}\right)^x$, $15000 = 60000$

$\left(\frac{100}{105}\right)^x$, $1 = 4 \left(\frac{100}{105}\right)^x$, und multiplizirt auf

beiden Seiten mit $\left(\frac{105}{100}\right)^x$, so erhält man

$\left(\frac{105}{100}\right)^x = 4$, und folglich $x \log. \left(\frac{105}{100}\right) = \log. 4$

$$x = \frac{\log. 4}{\log. \left(\frac{105}{100}\right)} = \frac{0{,}60206}{0{,}0211893} = 28{,}4.$$

Man sieht, daß der Schuldner 28 Ziele von 3000 fl. zu zahlen hat und nachher noch eine kleine Summe schuldig ist, welches man aus dem gebrochenen Theil des Werthes von x erkennt, den man übrigens nicht sehr benutzen kann. Um zu bestimmen, wie viel nach der Entrichtung des 28ten Zieles noch zu zahlen sey, denkt man sich, der Gläubiger habe 28 Jahre lang ein Kapital von 20 . 3000 fl. = = 60000 benutzt, welches dem Schuldner gehört, wofür er ihm am Ende des 28ten Jahres $60000 \times \left(\frac{105}{100}\right)^{28} - 60000$ zu vergüten hätte; dafür hat er aber eine Gegenfoderung von $45000 \left(\frac{105}{100}\right)^{28}$; der Schuldner hat also noch den Unterschied dieser zwei Posten zu entrichten, nemlich:

$$45000 \left(\frac{105}{160}\right)^{28} - 60000 \left(\frac{105}{100}\right)^{28} + 60000 =$$

$$60000 - 15000 \left(\frac{105}{100}\right)^{28} = 60000 - 15000 \,.$$

$$. \, 3{,}92013 = 60000 - 58801{,}95 = 1198{,}05 \text{ fl.}$$

Man könnte auch auf folgende Weise zu demselben Resultat gelangen. Die jährlichen Zinsen der 45000 fl. sind 2250 fl.; der Schuldner zahlt jährlich noch 750 fl. darüber, oder, was auf dasselbe herauskommt, er gewährt dem Gläubiger die

Nutznießung von $20 \times 750 = 15000$, und trägt noch überdieß regelmäßig die Zinsen seiner Schuld ab, wodurch sie nicht zunimmt; es muß also berechnet werden, nach wie viel Jahren die Nutznießung von 15000 fl. sich auf 45000 fl. belauft.

Nun weiß man aber, daß ein Kapital zu 5 $\frac{0}{0}$ in ungefähr 28 $^1/_2$ Jahren zum vierfachen anwächst (s. §. 19.); die 15000 fl. werden also in 28 $^1/_2$ Jahren 60000 fl., und folglich beträgt ihre Nutznießung in diesem Zeitraume 45000 fl.

Man hat übrigens nicht nöthig von der hier benutzten Betrachtung Gebrauch zu machen; denn, wenn man die unbekannte Zahl der Jahre durch x bezeichnet, so ist die Nutznießung der 15000 fl. nach x Jahren $= 15000 \left(\frac{105}{100}\right)^x - 15000$; also

$$15000 \left(\frac{105}{100}\right)^x - 15000 = 45000,\ 15000 \times$$

$\left(\frac{105}{100}\right)^x = 60000$ und endlich $\left(\frac{105}{100}\right)^x = 4$, welche Gleichung man schon gefunden hat.

55) A hat an B nach 16 Jahren 25000 fl. zu zahlen, und will diese Summe durch jährliche Ziele zu 2400 fl. abtragen. Wie viel Ziele müssen gemacht werden?

Gesetzt die Zahl der Ziele sey x, so erhält B die Benutzung von 20×2400 fl. während x Jahre, und der gegenwärtige Werth dieser Benutzung ist $20 \times 2400 - 20 \times 2400 \left(\frac{100}{105}\right)^x = 48000 - 48000 \left(\frac{100}{105}\right)^x$; der jetzige Werth der nach 16

Jahren fälligen 25000 fl. ist $= 25000 \left(\frac{100}{105}\right)^{16}$; man hat also die Gleichung:

$$48000 - 48000 \left(\frac{100}{105}\right)^x = 25000 \left(\frac{100}{105}\right)^{16},$$

$$48 - 48 \left(\frac{100}{105}\right)^x = 25 \left(\frac{100}{105}\right)^{16}, \text{ daher}$$

$$-48\left(\frac{100}{105}\right)^x = 25 \left(\frac{100}{105}\right)^{16} - 48 \text{ und } 48 \left(\frac{100}{105}\right)^x =$$

$$= 48 - 25 \left(\frac{100}{105}\right)^{16} = 48 - 25 \cdot 0,45812 = 48 -$$

$$- 11,453 = 36,547, \text{ also } \left(\frac{100}{105}\right)^x = \frac{36,547}{48};$$

mithin $x \log. \left(\frac{100}{105}\right) = \log. 36,547 - \log. 48$, oder

$$x = \frac{\log. 36,547 - \log. 48}{\log. \left(\frac{100}{105}\right)} =$$

$$= \frac{1,5628517 - 1,6812412}{-0,0211893} = \frac{-0,193895}{-0,0211893} = 5,3.$$

Es folgt hieraus, daß A 5 Jahre nach einander jedesmal 2400 fl. zu zahlen hat, und dann noch eine kleinere Summe als 2400 fl. schuldig ist. Um diese zu bestimmen, denke man sich, die Rechnung werde nach 5 Jahren geschlossen. B fodert dann für die 25000 fl., welche 11 Jahre später zahlbar sind $25000 \left(\frac{100}{105}\right)^{11}$; hingegen fodert A den Werth der Benutzung von 20×2400 fl. $= 48000$ fl., die durch ihn A während 5 Jahre gehabt, und zu $48000 \left(\frac{105}{100}\right)^5 - 48000$ anzuschlagen ist; A hat

demnach noch zu zahlen $25000 \left(\frac{100}{105}\right)^{11} + 48000 -$
$- 48000 \left(\frac{105}{100}\right)^{5} = 25000 . 0,584678 + 48000 -$
$- 48000 . 1,27624 = 14616,95 + 48000 - 61259,52$
$= 62616,95 - 61259,52 = 1357,43$, welche Summe A noch zu zahlen hat, nachdem er das 5te Ziel entrichtet.

Zur Auflösung dieser Aufgabe vermittelst einer geometrischen Reihe hat man die Gleichung:

$$2400 \left(\frac{100}{105}\right) + 2400 \left(\frac{100}{105}\right)^2 + \text{etc.} +$$
$$+ 2400 \left(\frac{100}{105}\right)^{x-1} + 24000 \left(\frac{100}{105}\right)^x =$$
$$= 25000 \left(\frac{100}{105}\right)^{16}.$$

56) A hat an B alle 5 Jahre 1200 fl. zu zahlen; sie kommen aber überein, daß diese fünfjährige Rente in eine jährige von 1000 fl. umgeschaffen werden solle. Wie viel Jahre hat nun A diese 1000 fl. zu zahlen?

Der Kapitalwerth einer 5jährlichen Einnahme von 1200 fl. ist $= \frac{1200}{\left(\frac{105}{100}\right)^5 - 1} = \frac{1200}{1,2762 - 1} =$
$= \frac{1200}{0,2762} = 4344,6$. Diese Summe ist eigentlich das, worauf B verzichten, und das ihm durch die Jahrrente vergütet werden soll. Nimmt man nun an, diese Rente solle x Jahre bezahlt werden, so hat man die Gleichung:

$$20000 - 20000\left(\frac{100}{105}\right)^x = 4344,6$$ (s. §. 54.) oder

$$1 - \left(\frac{100}{105}\right)^x = 0,21723, - \left(\frac{100}{105}\right)^x = 0,21723 - 1,$$

$$\left(\frac{100}{105}\right)^x = 1 - 0,21723 = 0,78277,$$ daher

$$x \log. \left(\frac{100}{105}\right) = \log. 0,78277$$ und

$$x = \frac{\log. 0,78277}{\log. \left(\frac{100}{105}\right)} = \frac{-0,1063658}{-0,0211893}.$$ Die hier herauskommende Zahl ist zwischen 5 und 6 enthalten. A hat also 5 Jahre nach einander 1000 fl. zu zahlen, und ist nachher noch eine kleinere Summe schuldig, welche wie in den Aufgaben §. 54 und 55 bestimmt wird.

57) A hat an B 18 Jahre nacheinander jährlich 700 fl. zu zahlen; wünscht aber, um die Schuld schneller zu tilgen, jährlich 1000 fl. abzutragen, wozu sich B auch versteht. Wie viel Jahre nach einander hat A die 1000 fl. zu zahlen?

A hat hier seinem Gläubiger die Benutzung von 20×700 fl. $= 14000$ während 18 Jahre zu gewähren; dafür soll aber dieser die Benutzung von 1000 fl. während x Jahre erhalten, man hat also die Gleichung:

$$20000 - 20000\left(\frac{100}{105}\right)^x = 14000 - 14000\left(\frac{100}{105}\right)^{18}$$

welche Gleichung ausdrückt, daß die Werthe beider Benutzungen, auf den gegenwärtigen Augenblick reduzirt, gleich sind. Man hat ferner:

$$10 - 10\left(\frac{100}{105}\right)^x = 7 - 7\left(\frac{100}{105}\right)^{18}, \text{ also}$$

$$-10\left(\frac{100}{105}\right)^x = -3 - 7\left(\frac{100}{105}\right)^{18}, \text{ oder}$$

$$10\left(\frac{100}{105}\right)^x = 3 + 7\left(\frac{100}{105}\right)^{18} = 3 + 7 \cdot 0,41552$$

$$= 3 + 2,90864 = 5,90864, \text{ also}$$

$$\left(\frac{100}{105}\right)^x = \frac{5,90864}{10} = 0,590864, \text{ daher}$$

$$x \log.\left(\frac{100}{105}\right) = \log.\ 0,590864 \text{ und}$$

$$x = \frac{\log.\ 0,590864}{\log.\left(\frac{100}{105}\right)} = \frac{-0,2285124}{-0,0211893} = 10,7.$$

A hat also 10 Jahre nach einander jedesmal 1000 fl. zu zahlen, und ist dann noch eine Summe schuldig, welche wiederum wie in den Aufgaben §. 54 und 55 bestimmt wird.

Wenn man sich hier der geometrischen Reihe bedient, so erhält man die Gleichung:

$$1000\left(\frac{100}{105}\right)^x + 1000\left(\frac{100}{105}\right)^{x-1} + \text{ꝛc.} +$$

$$+ 1000\left(\frac{100}{105}\right) = 700\left(\frac{100}{105}\right)^{18} + 700\left(\frac{100}{105}\right)^{17}$$

$$+ \text{ꝛc.} + 700\left(\frac{100}{105}\right).$$

58) A hat an B bis zum Ende des 50ten Jahres alle 5 Jahre 2500 fl. zu zahlen, und will diese Schuld durch jährige Ziele zu 1500 fl. abtragen. Wie viel Ziele müssen gemacht werden?

Die Summe, welche, nachdem sie 5 Jahre gestanden, 2500 fl. an Zinsen abwirft, ist

$$= \frac{2500}{\left(\frac{105}{100}\right)^5 - 1} = \frac{2500}{1,2762 - 1} = \frac{2500}{0,2762} =$$

$= 9051,4$. Diese Summe hat nun A dem Gläubiger zur Benutzung während 50 Jahre zu überlassen; dafür will er ihm aber x Jahre nach einander jedesmal 1500 fl. zahlen, oder, was dasselbe ist, ihm die Benutzung von 20×1500 fl. $= 30000$ fl. während x Jahre gewähren, welche Benutzung also der von 9051,4 während 50 Jahren gleich kommen muß; man hat also die Gleichung:

$$30000 - 30000 \left(\frac{100}{105}\right)^x = 9051,4 - 9051,4 \times \left(\frac{100}{105}\right)^{50},$$

daher $-30000 \left(\frac{100}{105}\right)^x = 9051,4 - 9051,4 \left(\frac{100}{105}\right)^{50} - 30000 = -9051,4 \left(\frac{100}{105}\right)^{50} - 20948,6$, oder $30000 \left(\frac{100}{105}\right)^x = 20948,6 + 9051,4 \left(\frac{100}{105}\right)^{50} = 20948,6 + 9051,4 . 0,0872037 = 20948,6 + 789,315 = 21737,915$, also

$$\left(\frac{100}{105}\right)^x = \frac{21737,915}{30000} = 0,7245771,$$

folglich

$$x \log. \frac{100}{105} = \log. 0,7245771 \text{ und } x = \frac{\log. 0,7245771}{\log. \frac{100}{105}}$$

$= \frac{-0,1390153}{-0,0211893} = 6,5\ldots$ A hat demnach 6 Jahre nach einander 1500 fl. zu zahlen und bleibt dann noch eine besonders zu berechnende Summe schuldig. Wenn man sich zur Auflösung dieser Aufgabe der geometrischen Reihe bedient, wird man zu folgender Gleichung geleitet:

$$2500\left(\frac{100}{105}\right)^{50} + 2500\left(\frac{100}{105}\right)^{45} + \text{rc.} + 2500\left(\frac{100}{105}\right)^{5} = 1500\left(\frac{100}{105}\right)^{x} + 1500 \times \left(\frac{100}{105}\right)^{x-1} + \text{rc.} + 1500\left(\frac{100}{105}\right).$$

Hier folgen noch einige Aufgaben, die durch dieselbe Methode aufgelöst werden, es werden daher nur die Gleichungen mitgetheilt, zu denen man gelangt, und die weitere Ausführung dem Leser überlassen.

59) A hat an B bis zum Ende des 36ten Jahres alle 3 Jahre 1400 fl. zu zahlen; wünscht aber die Schuld durch 2jährige Ziele von 800 fl. abzutragen. Wie viel Ziele müssen gemacht werden?

Um alle 3 Jahre 1400 fl. zu erhalten, muß man

$$\frac{1400}{\left(\frac{105}{100}\right)^{3} - 1} = \frac{1400}{1,1576 - 1} = \frac{1400}{0,1576} = 8883,2 \text{ fl.}$$

ausstellen, B kann also den gegenwärtigen Werth der Benutzung dieser Summe während 36 Jahren verlangen. A bietet ihm dafür x zweijährige Ziele zu 800 fl. an; eine zweijährige Einnahme von

800 fl. entspricht aber einem Kapital von

$$\frac{800}{\left(\frac{105}{100}\right)^2 - 1} = \frac{800}{1,1025 - 1} = \frac{800}{0,1025} = 7804,8,$$

mithin überläßt A dem Gläubiger die Benutzung von 7804,8 fl. während 2x Jahre, wofür dieser auf die Benutzung von 8883,2 fl. während 36 Jahre verzichtet; man hat also die Gleichung:

$$7804,8 - 7804,8 \left(\frac{100}{105}\right)^{2x} = 8883,2 - 8883,2 \times \left(\frac{100}{105}\right)^{36}.$$

Bedient man sich der geometrischen Reihe, so erhält man die Gleichung:

$$700 \left(\frac{100}{105}\right)^{2x} + 700 \left(\frac{100}{105}\right)^{2x-2} + \text{rc.} + 700 \left(\frac{100}{105}\right)^2 = 1400 \left(\frac{100}{105}\right)^{36} + 1400 \left(\frac{100}{105}\right)^{33} + \text{rc.} + 1400 \left(\frac{100}{105}\right)^3.$$

60) Es hat Einer 40 Jahre nach einander am Ende jedes Jahres 2000 fl. zu zahlen, und wünscht die ganze Schuld durch eine einzige Zahlung von 20000 fl. zu tilgen. Man fragt, wann diese geleistet werden müsse.

Der Gläubiger kann hier den gegenwärtigen Werth der Benutzung von 20×2000 fl. $= 40000$ fl. während 40 Jahre verlangen, oder $40000 - 40000 \left(\frac{100}{105}\right)^{40}$, dafür werden ihm 20000 fl. nach x

Jahren angeboten; der gegenwärtige Werth dieser letztern Summe ist aber 20000 $\left(\frac{100}{105}\right)^x$, man hat also die Gleichung:

$$20000 \left(\frac{100}{105}\right)^x = 40000 - 40000 \left(\frac{100}{105}\right)^{40}.$$

Durch den Gebrauch der geometrischen Reihe erhält man die Gleichung:

$$20000 \left(\frac{100}{105}\right)^x = 2000 \left(\frac{100}{105}\right)^{40} + 2000 \left(\frac{100}{105}\right)^{39}$$

$$+ \text{ꝛc.} + 2000 \left(\frac{100}{105}\right).$$

Bestimmung der Prozenten bei Zielzahlungen.

61) Die Brüche $\frac{105}{100}$ und $\frac{105}{100}$, deren Potenzen in den bisherigen Aufgaben so häufig vorgekommen sind, entsprechen dem fast allenthalben landesüblichen Zinsfuß zu 5 $\frac{0}{0}$; wo aber der Zinsfuß selbst unbekannt ist, und durch y bezeichnet wird, werden diese Brüche $\frac{100 + y}{100}$ und $\frac{100}{100 + y}$. Zur Abkürzung setzen wir $\frac{100 + y}{100} = x$ und folglich $\frac{100}{100 + y} = \frac{1}{x}$, daher $100 + y = 100\,x$ und $y = 100\,x - 100$, wodurch y leicht bestimmbar ist, wenn man x gefunden hat; aber eben die Berechnung der Größe x ist sehr großen Schwierigkeiten unterworfen, wenn die Zahl der

Ziele 2 übersteigt, denn die Gleichung, durch welche x gegeben ist, enthält, wenn n die Anzahl der Ziele vorstellt, außer x^n noch andere Potenzen von x, ist also eine höhere Gleichung und läßt den Gebrauch der Logarithmen nicht zu. Es folgen hier einige Aufgaben für den Fall, wo nur zwei oder höchstens drei Ziele vorkommen.

62) Es nimmt Einer 4000 fl. auf, und zahlt dafür 2200 fl. am Ende des ersten Jahres, und eben so viel am Ende des zweiten Jahres. Nach welchem Zinsfuß wurde gerechnet?

Der jetzige Werth des ersten Zieles ist $= \frac{2200}{x}$ und der des zweiten Zieles $= \frac{2200}{x^2}$; man hat also die Gleichung:

$$\frac{2200}{x} + \frac{2200}{x^2} = 4000, \text{ oder } \frac{11}{x} + \frac{11}{x^2} = 20.$$

Schafft man die Nenner weg, so hat man: $11x + 11 = 20x^2$ oder $20x^2 - 11x = 11$, also $x^2 - \frac{21}{20}x = \frac{11}{20}$ und $x = \frac{11}{40} \pm \sqrt{\frac{121}{1600} + \frac{11}{20}}$ $= \frac{11}{40} \pm \sqrt{\frac{1001}{1600}} = \frac{11}{40} + \frac{31,638}{40}$ (der negative Werth ist hier unbrauchbar) $= \frac{42,638}{40}$. Hieraus folgt $y = \frac{4263,8}{40} - 100 = 106,595 - 100 =$ $= 6,595$. Die 40000 fl. haben also ungefähr zu $6\frac{3}{5}$ % gestanden.

Die Gleichung, durch welche man zu diesem Resultate gelangt ist, hat ausgedrückt, daß der jetzige Werth der zwei Ziele 4000 fl. ist; man hätte aber auch durch eine Gleichung ausdrücken können, daß der Werth der zwei Ziele in 2 Jahren der Summe gleicht, zu welcher 1000 fl. in diesem Zeitraume anwachsen. Man hätte alsdann gleich $2200\,x + 2200 = 4000\,x^2$ wie oben. Man hätte auch auf folgende Weise den Werth von y direkt finden können: 4000 fl. sind am Ende des 1ten Jahres 4000 fl. + 40 y, hievon werden 2200 fl. abgezahlt, wodurch die Schuld noch 1800 + 40 y ist; diese werden aber am Ende des 2ten Jahres

$$1800 + 18\,y + 40\,y + \frac{40\,y \cdot y}{100} = 1800 + 48\,y + \frac{4\,y^2}{10},$$ man hat also: $$\frac{4\,y^2}{10} + 58\,y + 1800 = 2200,\quad \frac{4\,y^2}{10} + 58\,y = 400,\quad \frac{y^2}{10} + \frac{29}{2}\,y = 100,\quad y^2 + 145\,y = 1000,$$ folglich:

$$y = -\frac{145}{2} \pm \sqrt{\frac{21025}{4} + 1000} = -\frac{145}{2} \pm \sqrt{\frac{25025}{4}} = -\frac{145}{2} + \frac{158{,}19}{2} = \frac{13{,}18}{2} = 6{,}595.$$

63) Es hat Jemand 5000 fl. nach 3 Jahren zu entrichten; zahlt aber dafür 2400 fl. am Ende des ersten, und eben so viel am Ende des zweiten Jahres. Zu wie viel Prozenten wurden die Zinsen gerechnet?

Der jetzige Werth der nach 3 Jahren zahlbaren 5000 fl. ist $\frac{5000}{x^3}$, derjenige der 2 Zielzahlungen $= \frac{2400}{x^2}$ und $\frac{2400}{x}$, man hat also:

$$\frac{2400}{x} + \frac{2400}{x^2} = \frac{5000}{x^3}.$$

Bringt man die Nenner weg, und dividirt nachher jedes Glied durch 200, so kommt $12x^2 + 12x = 25$, $x^2 + x = \frac{25}{12}$, folglich

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{12} + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{3}} = -0{,}5 + 1{,}5275 = 1{,}0275;$$ daher $y = 102{,}75 - 100 = 2\frac{3}{4}$.

64) Jemand nimmt 4000 fl. auf, und zahlt dafür 3000 fl. nach 3 Jahren und eben so viel nach 6 Jahren. Wie viel Prozent sind die Zinsen?

Der gegenwärtige Werth des ersten Zieles ist $= \frac{3000}{x^3}$, und der des zweiten Zieles $= \frac{3000}{x^6}$; man hat also die Gleichung:

$$\frac{3000}{x^3} + \frac{3000}{x^6} = 4000,\ \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^6} = 4,\ 3x^3 + 3 = 4x^6.$$

Die hier gefundene Gleichung ist zwar vom 6ten Grade; läßt sich aber wie die Gleichungen vom 2ten Grade auflösen, wenn man $x^3 = z$ setzt. Man hat alsdann $3z + 3 = 4z^2$, $4z^2 - 3z = 3$, $z^2 - \frac{3}{4}z = \frac{3}{4}$, folglich $z = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{3}{4}} = \frac{3}{8}$

$$\pm\sqrt{\frac{57}{62}} = \frac{3}{8} + \frac{7,5498}{8} = \frac{10,5498}{8} = 1,318725.$$

Man hat nun $x = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1,318725}$, oder, wenn man sich zur Ausziehung der Cubikwurzel der Logarithmen bedient, log. $x = \frac{1}{3}$ log. $1,318725 = \frac{1}{3} \cdot 0,1201541 = 0,0400514$, daher $x = 1,0966$, und $y = 100\,x - 100 = 109,66 - 100 = 9,66$.

65) Jemand hat 12000 fl. nach 14 Jahren zu zahlen; giebt aber dafür 4000 fl. nach dem 6ten und 5000 fl. nach dem 10ten. Zu wie viel Prozenten wurden die Zinsen berechnet?

Der jetzige Werth der 12000 fl. ist $= \frac{12000}{x^{14}}$, der des ersten Zieles $= \frac{4000}{x^6}$ und der des 2ten $= \frac{5000}{x^{10}}$, man hat also:

$$\frac{4000}{x^6} + \frac{5000}{x^{10}} = \frac{12000}{x^{14}},\ \frac{4}{x^6} + \frac{5}{x^{10}} = \frac{12}{x^{14}},$$

$$4\,x^8 + 5\,x^4 = 12.$$

Setzt man nun $x^4 = z$, so ist $x^8 = z^2$ und $4\,z^2 + 5\,z = 12$, $z^2 + \frac{5}{4}\,z = 3$; also

$$z = -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} + 3} = -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{217}{64}} = -\frac{5}{8} + \frac{14,732}{8} = \frac{9,732}{8} = 1,2165.$$

Nun ist $x = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1,2165}$ und log. $x = \frac{1}{4}$ log. $1,2165 = \frac{1}{4} \cdot 0,0851121 = 0,0212780$, daher $x = 1,0502$ und $y = 100\,x - 100 = 105,02 - 100 = 5,02$.

66) Es nimmt Einer 8000 fl. auf und tilgt seine Schuld durch 3 Zielzahlungen, am Ende des 1ten, 2ten und 3ten Jahres, jedesmal von 3000 fl. Zu wie viel Prozenten sind hier die Zinsen gerechnet?

Die jetzigen Werthe der 3 Ziele sind hier $\frac{3000}{x}, \frac{3000}{x^2}, \frac{3000}{x^3}$; man hat also die Gleichung:

$$\frac{3000}{x} + \frac{3000}{x^2} + \frac{3000}{x^3} = 8000, \quad \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3} = 8,$$

$$3x^2 + 3x + 3 = 8x^3, \quad 8x^3 - 3x^2 - 3x - 3 = 0,$$

$$x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{3}{8} = 0 \ldots (A).$$

Für Gleichungen, welche folgende Gestalt haben: $x^3 + px + q = 0$, nemlich, worin x nur in der dritten und in der ersten Potenz vorkommt, hat man die Formel:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Um diese Formel hier anwenden zu können, muß aus der Gleichung (A) das Glied, welches x^2 enthält, weggeschafft werden. Zu diesem Ende setze man $x = u + \frac{1}{8}$. Man hat dann:

$$x^3 = \left(u+\frac{1}{8}\right)^3 = u^3 + \frac{3u^2}{8} + \frac{3u}{64} + \frac{1}{512}$$

$$-\frac{3}{8}x^2 = -\frac{3}{8}\left(u+\frac{1}{8}\right)^2 = -\frac{3u^2}{8} - \frac{6u}{64} - \frac{3}{512}$$

$$-\frac{3}{8}x = -\frac{3}{8}\left(u+\frac{1}{8}\right) = -\frac{3u}{8} - \frac{3}{64}$$

$$-\frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$$

also $x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{3}{8} = u^3 - \frac{27u}{64} - \frac{109}{256} = 0.$

Diese Gleichung in u verglichen mit der $x^3 + px = q$ giebt $p = -\frac{27}{64}$, $q = -\frac{109}{256}$, also:

$$\frac{1}{27}p^3 = -\frac{1}{27} \cdot \frac{27^3}{64^3} = -\frac{27^2}{64^3} = -\frac{729}{262144} = -0{,}002781$$

$$\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{109^2}{256^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{11881}{65456} = \frac{11881}{261824} = 0{,}045379$$

$$\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2 = 0{,}042598$$

Ferner ist $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2} \times -\frac{109}{256} = -\frac{109}{512} =$
$= -0{,}21289$ und $-\frac{1}{2}q = 0{,}21289.$

$$-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} = 0{,}21289 + \sqrt{0{,}042598}$$
$$= 0{,}21289 + 0{,}20639 = 0{,}41928,$$

$$-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} = 0{,}21289 - \sqrt{0{,}042598} =$$
$$= 0{,}21289 - 0{,}20639 = 0{,}00650,$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{0{,}41928} = 0{,}74341$$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=\sqrt[3]{0,00650}=0,18662$, also $u=0,74341+0,18662=0,93003$, folglich $x=u+\frac{1}{8}=0,93003+0,125=1,05503$, und endlich $y=100x-100=105,503-100=5,503$.

Man sieht durch obiges Beispiel, wie weitläufig und beschwerlich die Berechnung schon bei drei Zielen wird, welche Schwierigkeit natürlich bei einer größern Anzahl von Zielen bedeutend größer ist. Sämmtliche Hülfsmittel der Theorie der Gleichungen müssen hier aufgeboten werden, wenn auch die Aufgaben nur näherungsweise gelößt werden sollen. Es ist dem Zwecke dieser Schrift fremd, welche hauptsächlich die Anwendung der Logarithmen auf die höhere Zinsrechnung zu lehren hat, bei dieser Gelegenheit eine ausführliche Anleitung zur Auflösung der numerischen Gleichungen, die den zweiten und dritten Grad übersteigen, zu liefern.

Von Zielzahlungen mit einfachen Zinsen.

67) Die Aufgaben über Zielzahlungen mit einfachen Zinsen bieten eben so große Schwierigkeiten dar, als wo Zinszinsen gerechnet werden und wohl gar noch größere. Diese Schwierigkeiten werden in den Rechenbüchern indessen mehr umgangen als beseitigt. Gewöhnlich geht man, zwar nicht ausdrücklich, sondern stillschweigend, von dem Grundsatze aus, daß der Genuß der Zinsen für eine Summe a während b Jahre von gleichem Werth ist als der von $a \times b$ während eines Jahres; so,

daß es z. B. gleichgültig ist, ob man die Zinsen von 3000 fl. für 4 Jahre oder die von 4×3000 fl. $= 12000$ fl. für ein einziges Jahr zu beziehen hat. In der Folge soll untersucht werden, in wie fern dieser Grundsatz unumstößlich richtig sey. Für jetzt aber soll seine Anwendung auf die verschiedenen Aufgaben, welche bei Zielzahlungen mit einfachen Zinsen vorkommen, gezeigt werden.

68) A hat an B 12 Jahre nach einander am Ende jedes Jahres 1500 fl. zu zahlen, und will die ganze Schuld jetzt abtragen. Wie viel hat er zu zahlen?

Die ganze Schuld beträgt hier $12 \times 1500 =$ 18000 fl., von welcher Summe die Zinsen abgezogen werden müssen, die A aus den 12 Zielen hätte ziehen können, wenn er sie erst zur bestimmten Zeit ausgezahlt hätte. Nun sind die Zinsen:

von 1500 fl. auf ein Jahr $= \frac{1500 \times 5}{100} = 1.75$ fl.

von 1500 fl. auf zwei Jahre $= 2\,\frac{1500 \times 5}{100} = 2.75$ fl.

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

von 1500 fl. auf zwölf Jahre $= 12\,\frac{1500.5}{100} = 12.75$ fl.

Die Summe der Zinsen, welche von 18000 fl. abgezogen werden müssen, ist also $= 75\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 12) = 75\,\frac{12\,.\,13}{2}$ (s. S. 9) $= 75\,.\,78 = 5850$. A hat demnach zu zahlen 18000 fl. — $5850 = 12150$ fl.

69) A hat an B 14 Jahre nach einander am Ende jedes Jahres 1800 fl. zu zahlen; vernachläßigt aber die Entrichtung der Ziele, und muß dadurch am Ende des 18ten Jahres die ganze Schuld abtragen und die Zinsen vergüten. Wie viel hat er zu zahlen?

Das Kapital beträgt hier 14 × 1800 fl. = = 25200 fl. Für das 14te Ziel werden keine Zinsen gerechnet, weil es zur bestimmten Zeit abgetragen wird. Die Zinsen für das 13te Ziel sind

$$= \frac{1800 \times 5}{100} = 1 \,.\, 90 \text{ fl.}$$

die für das 12te $= 2\,\frac{1800 \times 5}{100} = 2 \,.\, 90$ fl.

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

die für das 1te $= 13\,\frac{1800 \times 5}{100} = 13 \,.\, 90$ fl.

Die Summe der rückständigen Zinsen ist also

$90\,\frac{13 \,.\, 14}{2} = 90 \,.\, 91 = 8190.$ A hat folglich zu zahlen 25200 fl. + 8190 = 33390 fl.

70) Es stellt Jemand 18000 fl. auf Zinsen, um sich daraus eine jährliche Einnahme von 3000 fl. zu verschaffen. Wie viel Jahre hat er diese Einnahme zu beziehen?

Bezeichnet man die unbekannte Zahl durch x, so ist der jetzige Werth sämmtlicher Posten, die A zu beziehen hat, 3000 x vermindert um die Zinsen, welche diese Posten bis zur Verfallzeit getra-

gen hatten, und da 3000 fl. in einem Jahre 150 fl. tragen, so ist die Summe dieser Zinsen

$$= 150\,(1 + 2 + 3 \ldots + x) = 150\,\frac{x\,(x+1)}{2};$$

man hat also die Gleichung:

$$3000\,x - 150\,\frac{x\,(x+1)}{2} = 18000,\ 20\,x - \frac{x\,(x+1)}{2}$$

$$= 120,\ 40\,x - x^2 - x = 240,\ x^2 - 39\,x = -240,$$

folglich: $x = \frac{39}{2} \pm \sqrt{\frac{1521}{4} - 240} = \frac{39}{2} \pm \sqrt{\frac{561}{4}}$

$$= \frac{39}{2} \pm \frac{23{,}6}{2} = \begin{cases} 31{,}6 \\ 7{,}4 \end{cases}.$$

71) Es ist hier nicht schwer zu entscheiden, daß von den zwei gefundenen positiven Werthen 31,6 und 7,4 der letzte eigentlich der richtige sey; indessen ist es unzweifelhaft, daß auch der erste vollkommen den Bedingnissen der Aufgabe entspricht, und es können Fälle vorkommen, wo es nicht so leicht wäre beim ersten Anblick zu erkennen, daß die Radicalgröße negativ genommen werden müsse. Um dies für den allgemeinen Fall zu beweisen, wollen wir die Aufgabe im Allgemeinen auflösen.

Gesetzt also das Kapital sey a, die verlangte jährliche Einnahme b, und man wolle wissen, wie vielmal diese ausgezahlt werden müsse.

Diese Aufgabe führt zur Gleichung $b\,x - \frac{b}{20} \cdot \frac{x\,(x+1)}{2} = a$, oder $b\,x - \frac{b\,x\,(x+1)}{40} = a$,

daher $40bx - bx^2 - bx = 40a$, $bx^2 - 39bx = 40a$, $x^2 - 39x = -\frac{40a}{b}$, folglich: $x = -\frac{39}{2} \pm \sqrt{\frac{1521}{4} - \frac{40a}{b}}$.

Um eine weitläufige Erörterung zu vermeiden, nehmen wir an, daß $\sqrt{\frac{1521}{4} - \frac{40a}{b}} > \frac{1}{2}$, wodurch einer der beiden Werthe von x größer und der andere kleiner als 20 wird, und zwar wird der eine um so viel größer seyn, als der andere kleiner. Gesetzt die zwei Werthe seyen für einen gegebenen Fall 17 und 23, so folgt daraus, daß 17 Ziele vermindert um die Zinsen, die sie bis zum Zahlungstag tragen, dem niedergelegten Kapital gleichkommen; man könnte also glauben, daß für die 6 folgenden Ziele eine besondere Summe niedergelegt werden müsse; man muß aber bedenken, daß bei strenger Consequenz für eine Summe, die nach einer längern Frist als 20 Jahre gezahlt wird, nicht nur gegenwärtig nichts gezahlt zu werden braucht, sondern derjenige, gegen welchen die Verbindlichkeit eingegangen wird, noch Geld dazu fodern könnte (s. §. 21.); obgleich ein solcher Umstand nun in der Wirklichkeit nicht Statt finden kann, so nimmt doch die Algebra darauf Rücksicht; daher der Werth, welcher 20 übersteigt, der aber natürlich zur Auflösung der Aufgabe nicht dienen kann. Aus diesen Betrachtungen folgt noch der merkwürdige Umstand, daß die Anzahl der Ziele

nie 20 übersteigen könne, welcher schon allein die Richtigkeit der Annahme, auf welche obige Auflösung gegründet ist, verdächtig machen muß.

72) Es legt Jemand ein Kapital von 20000 fl. nieder, und wünscht sich damit auf 15 Jahre eine gleiche jährliche Einnahme zu verschaffen. Wie viel wird er jedes Jahr erhalten?

Bezeichnet man die unbekannte Zahl durch x, so ist der jährliche Zins für ein Ziel $\frac{x}{20}$, und der jetzige Werth sämmtlicher Ziele $= 15x -$

$$- \frac{x}{20} \cdot \frac{15 \cdot 14}{2} = 15x - \frac{x}{20} \cdot 105 = 15x - \frac{21x}{20}$$

man hat also:

$$15x - \frac{21x}{20} = 20000, \quad 300x - 21x = 400000,$$

$$279x = 400000 \text{ und } x = 1433,7.$$

73) Es hat Einer k Jahre nach einander am Ende jedes Jahres eine bestimmte Summe a zu zahlen, und wünscht die ganze Summe an einem Tage abzutragen. Man fragt, wann dies geschehen müsse, damit weder der Gläubiger noch der Schuldner dabei verliere.

Da der Schuldner vor der Entrichtung der Ziele ihre Zinsen noch bis zum Zahlungstage zu beziehen berechtigt ist, so darf er die ganze Schuld, nemlich ak so lange zurückhalten, bis sie ihm eben so viel an Zinsen hätte einbringen können. Nimmt man nun an, der jährliche Zins sey der mte Theil vom Kapital, so ist die Summe der Zinsen, welche die Ziele bis zum Zahlungstage abwerfen können,

$= \frac{a}{m} \cdot \frac{k(k+1)}{2}$ und die von a k Gulden für x Jahre (wenn man die unbekannte Zahl durch x bezeichnet) $= \frac{akx}{m}$; man hat also die Gleichung:

$$\frac{akx}{m} = \frac{ak(k+1)}{2m}.$$

Der gemeinschaftliche Faktor ak und der gemeinschaftliche Nenner m gehen weg, und es bleibt $x = \frac{k+1}{2}$.

Man sieht hieraus, daß unabhängig von der Größe der Ziele und vom Zinsfuße der Zahlungstag für die gesammte Schuld gefunden wird, wenn man die Anzahl der Ziele um 1 vermehrt und das Herauskommende halbirt.

74) Wir kommen nun auf den Grundsatz zurück, der bei allen diesen Auflösungen stillschweigend angenommen wird, daß nemlich die Benutzung von a Gulden während b Jahre der von a × b Gulden während eines Jahres gleichkomme. So evident er auch beim ersten Anblicke erscheint, so sehr kann man ihn dennoch mit Recht bestreiten; denn obgleich keine Verträge auf Zinszinsen Gültigkeit haben, so bleibt es dennoch jedem Gläubiger unbenommen, die ihm gebührenden Zinsen zur gehörigen Zeit einzufodern und sie nachher als Kapitalien zu benutzen.

Aus eben diesem Grunde können aber alle Aufgaben, die sich auf Zielzahlungen mit einfachen

Zinsen, mit Ausnahme derjenigen, wo durch Vernachläßigung der Zielzahlungen die ganze Schuld nach Ablauf des letzten Zieles ausgezahlt werden soll, im wirklichen Leben gar nicht vorkommen. Es ist oft der Fall, daß durch Nachgiebigkeit des Gläubigers oder durch andere Umstände die Zinsen für mehrere Jahre in einem Male gezahlt werden, wobei dann der Gläubiger den Nutzen einbüßt, den er aus den Zinsen bis zum Zahlungstage hätte ziehen können, wenn sie zur rechten Zeit eingegangen wären; aber bei Ausleihung eines Kapitals sich zu einer so nachtheiligen Bedingung verstehen, als die ist, auf die Erhebung der Zinsen zur gehörigen Zeit zu verzichten, wird wohl Niemand, und wenn ja der Fall sich einstellt, daß zwei Personen eine Uebereinkunft dieser Art treffen, so müssen sie die übrigen Bestimmungen ebenfalls durch Uebereinkunft festsetzen, indem sie sich nicht aus der Natur des gewählten Zinsfußes ergeben; oder auch den obigen Grundsatz mit allen Absurditäten, zu denen er bisweilen führt, zur Basis ihrer Rechnung nehmen.

75) Brune in seiner sehr schätzbaren Schrift: «Kurzgefaßte Darstellung der einfachen und zusammengesetzten Zinsrechnung», welche zu Lemgo 1813 erschienen ist, geht von dem an sich sehr richtigen Grundsatze aus, daß, wenn eine Summe vor der festgesetzten Zeit ausgezahlt werden soll, der Rabatt nicht von hundert (statt 100 nur 95), sondern auf hundert (statt

105 nur 100) berechnet werden müsse; aber außerdem, daß dieser Grundsatz aus der oben angeführten Ursache ebenfalls nicht auf mehrere Jahre angewendet werden darf, sind auch die Gleichungen, zu welchen er führt, ungemein schwierig, und ihre Auflösungen sind zwar wegen des dabei angewandten Scharfsinnes von großem Interesse, aber sowohl wegen ihrer Schwierigkeit als der geringen Genauigkeit, die sie gewähren, von keinem großen practischen Nutzen. Hier soll nur die Gleichung mitgetheilt werden, zu welcher man durch Brune's Annahme gelangt; wegen der Auflösungen aber verweisen wir auf die Schrift selbst.

76) Es nimmt Einer ein Kapital a auf zu p $\frac{0}{0}$ und will die Schuld in n jährlichen Zielen mit einfachen Zinsen abtragen. Wie viel muß er jedes Jahr zahlen?

Bezeichnet man die unbekannte Zahl durch x,

so ist der jetzige Werth des ersten Zieles $= \frac{100\,x}{100 + p}$

des zweiten Zieles $= \frac{100\,x}{100 + 2p}$

$\vdots \qquad \vdots$

des nten Zieles $= \frac{100\,x}{100 + np}$

der jetzige Werth sämmtlicher Ziele aber muß natürlich dem Kapital gleichkommen; man hat also die Gleichung:

$$\frac{100x}{100+p}+\frac{100x}{100+2p}+\ldots+\frac{100x}{100+np}=a.$$

Wenn n eine kleine Zahl ist, hat die Auflösung dieser Gleichung keine sonderliche Schwierigkeit, denn man kann alsdann die Coefficienten von x auf die gewöhnliche Weise addiren; ist aber n etwas groß, so muß man die Reihe, welche diese Coefficienten bilden, so wie die geometrischen oder arithmetischen Reihen, zu summiren suchen, welches sogar unumgänglich nöthig ist, wenn n oder die Zahl der zu machenden Ziele als die unbekannte Größe gesucht wird. Die Reihe, von welcher hier die Rede ist, besteht aus einer Folge von Brüchen, deren Zähler gleich sind, und deren Nenner eine arithmetische Progression bilden; man nennt sie die harmonische Progression. Außer dem angeführten Werke giebt noch kein Elementarbuch ihre Auflösung.

Von Zinsen im Laufe des Jahres.

77) Es ist oben §. 5 bemerkt worden, daß die Formeln zur Berechnung der Zinszinsen nur dann strenge genommen richtig sind, wann n eine ganze Zahl ist. Diese allerdings richtige Bemerkung gründet sich auf die übliche Weise, die Zinsen, welche im Laufe des Jahres gezahlt werden, zu berechnen, bei welchen man gewöhnlich annimmt, selbst wo Zinszinsen in Anschlag gebracht werden, daß der zu entrichtende Zins sich zum Zinse vom selben Kapital für ein ganzes Jahr verhalte, wie die

Anzahl der schon verstrichenen Monate oder Tage zum ganzen Jahre, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Zinsen mitten im Jahre nicht eingefodert werden können, und daher derjenige, welcher sie im Laufe des Jahres zahlet, auf eine Vergütung Anspruch zu machen habe.

Wenn man diese angenommene Berechnungsweise außer Augen läßt, und blos auf die Natur der Zinszinsen Rücksicht nimmt, so kann man beweisen, daß die Formel $S = a\,r^n$ für jeden Werth von n vollkommen richtig ist.

78) Obgleich die Zinsen gemeiniglich am Ende des Jahres erhoben werden, so darf man sich doch nicht vorstellen, daß die Schuld einen plötzlichen Zuwachs am Ende des Jahres erhalten habe, sondern, daß sie durch allmäliges Zunehmen während des ganzen Jahres nach einem bestimmten Gesetze ihre neue Größe erreicht habe. Dieses Zunehmen ist einförmig, d. h. sie ist in stetem geometrischen Verhältnisse mit der Zeit, wo nur einfache Zinsen gerechnet werden; bei Zinszinsen hingegen ist die Zunahme in jedem kleinen Zeitraum ein bestimmter Theil von der Schuld, so groß sie am Anfange dieses Zeitraums war, z. B. bei 5 % der zwanzigste Theil, multiplizirt mit der Länge dieses Zeitraumes, und dieses Gesetz ist um so strenger richtig, je kleiner man sich diese Zeiträume denkt, während deren die Zunahme einförmig ist.

Bezeichnet man nun die Zeit durch n, einen verschwindend kleinen Zeitraum durch dn, die Größe

der Schuld in einer gegebenen Zeit n nach der Aufnahme des Kapitals durch S, ihr Zuwachs während des Zeitraumes dn durch dS, und den beständigen Coefficienten, welcher angiebt, welcher Theil der Schuld mit dem Zeitraume dn multiplizirt werden müsse, durch k, so hat man die Gleichung:

$$dS = kSdn$$

$$\int \frac{dS}{S} = \int k\,dn$$

$$\log. S = kn + C.$$

C bezeichnet hier die beständige Größe, welche das Integral ergänzt. Um sie zu bestimmen, bezeichne a das aufgenommene Kapital oder die Größe der Schuld für $n = o$, man hat dann $\log. a = C$, folglich:

$$\log. S = kn + \log. a.$$

Setzt man nun $k = \log. r$, so ist $\log. S = n \times \log. r + \log. a$, oder $\log S = \log. r^n + \log. a = \log. a r^n$ und $S = a r^n$.

79) Um nun auch die Größe r zu bestimmen, nehme man das Jahr für die Einheit der Zeit; wenn nun 100 fl. Kapital am Ende des Jahres zu $100 + p$ angewachsen sind, so ist $100 + p = r^1 \times 100$ und folglich $r = \frac{100 + p}{100}$.

Die Formel $S = a r^n$ ist also für jeden gegebenen Zeitraum wahr, wodurch es nun leicht ist, den Zins zu bestimmen, wenn er im Laufe des Jahres entrichtet werden soll. Will man z. B. wissen, wie viel

100 fl. in 1/4 Jahr tragen, so hat man:

$$S = \left(\frac{105}{100}\right)^{\frac{1}{4}} \times 100 = 100 \sqrt[4]{\frac{105}{100}},$$ zieht man hievon 100 fl. als das gegebene Kapital ab, so findet man für den 1/4jährigen Zins $\sqrt[4]{\frac{105}{100}} - 100$; auf gleiche Weise findet man für den halbjährigen $\sqrt{\frac{105}{100}} - 100$, und überhaupt für das $\frac{1}{m}$teljährige $\sqrt[m]{\frac{105}{100}} - 100$.

Die Aufgaben, welche in dieser Schrift vorkommen, beziehen sich alle auf Fälle, wo die Zinsen *am* Ende des Jahres entrichtet werden; nachdem aber nun bewiesen ist, daß die Grundformel $S = ar^n$ für jeden Werth von n wahr ist, hat es keine weitere Schwierigkeit, die bei Gelegenheit dieser Aufgaben gefundenen Regeln auf die Fälle auszudehnen, wo Zahlungen im Laufe des Jahres geschehen.

Mainz,
gedruckt bei Florian Kupferberg.

Tafel
der
Logarithmen
für
alle ganze Zahlen
von
1 bis 10,000 in sieben Decimal-Bruchstellen.

z	0.	100.	200.	300.
0	*	2.0000000	2.3010300	2.4771213
1	0.0000000	2.0043214	2.3031961	2.4785665
2	3010300	086002	053514	800069
3	4771213	128372	074960	814426
4	6020600	170333	096302	828736
5	6989700	211893	117539	842998
6	7781513	253059	138672	857214
7	8450980	293838	159703	871384
8	9030900	334238	180633	885507
9	9542425	374265	201463	899585
10	1.0000000	413927	222193	913617
11	0413927	453230	242825	927604
12	0791812	492180	263359	941546
13	1.1139434	530784	283796	955443
14	1461280	569049	304138	969296
15	1760913	606978	324385	983106
16	1.2041200	644580	344538	996871
17	2304489	681859	364597	2.5010593
18	2552725	718820	384565	024271
19	2787536	755470	404441	037907
20	1.3010300	791812	424227	051500
21	3222193	827854	443923	065050
22	3424227	863598	463530	078559
23	3617278	899051	483049	092025
24	3802112	934217	502480	105450
25	3979400	969100	521825	118834
26	1.4149733	2.1003705	541084	132176
27	4313638	038037	560259	145478
28	4471580	072100	579348	158738
29	4623980	105897	598355	171959
30	4771213	139434	617278	185139
31	4913617	172713	636120	198280
32	1.5051500	205739	654880	211381
33	5185139	238516	673559	224442

z	0.	100.	200.	300.
34	1 . 5314789	2 . 1271048	2 . 3692159	2 . 5237465
35	440680	303338	710679	250448
36	563025	335389	729120	263393
37	682017	367206	747483	276299
38	797836	398791	765770	289167
39	910646	430148	783979	301997
40	1 . 6020600	461280	802112	314789
41	127839	492191	820170	327544
42	232493	522883	838154	340261
43	334685	553360	856063	352941
44	434527	583625	873898	365584
45	532125	613680	891661	378191
46	627578	643529	909351	390761
47	720979	673173	926970	403295
48	812412	702617	944517	415792
49	901961	731863	961993	428254
50	989700	760913	979400	440680
51	1 . 7075702	789769	996737	453071
52	160033	818436	2 . 4014005	465427
53	242759	846914	031205	477747
54	323938	875207	048337	490033
55	403627	903317	065402	502284
56	481880	931246	082400	514500
57	558749	958997	099331	526682
58	634280	986571	116197	538830
59	708520	2 . 2013971	132998	550944
60	781513	041200	149733	563025
61	853298	068259	166405	575072
62	923917	095150	183013	587086
63	993405	121876	199557	599066
64	1 . 8061800	148438	216039	611014
65	129134	174839	232459	622929
66	195439	201081	248816	634811

z	0.	100.	200.	300.
67	1 . 8260748	2 . 2227165	2 . 4265113	2 . 5646661
68	325089	53093	81348	58478
69	388491	78867	97523	70264
70	450980	2 . 2304489	2 . 4313638	82017
71	512583	29961	29693	93739
72	573325	55284	45689	2 . 5705429
73	633229	80461	61626	17088
74	692317	2 . 2405492	77506	28716
75	750613	30380	93327	40313
76	808136	55127	2 . 4409091	51878
77	864907	79733	24798	63414
78	920946	2 . 2504200	40448	74918
79	976271	28530	56042	86392
80	1 . 9030900	52725	71580	97836
81	084850	76786	87063	2 . 5809250
82	138139	2 . 2600714	2 . 4502491	20634
83	190781	24511	17864	31988
84	242793	48178	33183	43312
85	294189	71717	48449	54607
86	344985	95129	63660	65873
87	395193	2 . 2718416	78819	77110
88	444827	41578	93925	88317
89	493900	64618	2 . 4608978	99496
90	542425	87536	23980	2 . 5910646
91	590414	2 . 2810334	38930	21768
92	637878	33012	53829	32861
93	684829	55573	68676	43926
94	731279	78017	83473	54962
95	777236	2 . 2900346	98220	65971
96	822712	22561	2 . 4712917	76952
97	867717	44662	27564	87905
98	912261	66652	42163	98831
99	956352	88531	56712	2 . 6009729
100	2 . 0000000	2 . 3010300	71213	20600

z	400.	500.	600.	700.	800.	900.
	2,6	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9
0	020600	989700	781513	450980	030900	542425
1	31444	98377	88745	57180	36325	47248
	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9
2	42261	007037	95965	63371	41744	52065
3	53050	15680	803173	69553	47155	56878
4	63814	24305	10369	75727	52560	61684
5	74550	32914	17554	81891	57959	66486
6	85260	41505	24726	88047	63350	71282
7	95944	50080	31887	94194	68735	76073
8	106602	58637	39036	500333	74114	80858
9	17233	67178	46173	06462	79485	85639
10	27839	75702	53298	12583	84850	90414
11	38418	84209	60412	18696	90209	95184
12	48972	92700	67514	24800	95560	99948
13	59501	101174	74605	30895	100905	604708
14	70003	09631	81684	36982	06244	09462
15	80481	18072	88751	43060	11576	14211
16	90933	26497	95807	49130	16902	18955
17	201361	34905	902852	55192	22221	23693
18	11763	43298	09885	61244	27533	28427
19	22140	51674	16906	67289	32839	33155
20	32493	60033	23917	73325	38139	37878
21	42821	68377	30916	79353	43432	42596
22	53125	76705	37904	85372	48718	47309
23	63404	85017	44880	91383	53998	52017
24	73659	93313	51846	97386	59272	56720
25	83889	201593	58800	603380	64539	61417
26	94096	09857	65743	09366	69800	66110
27	304279	18106	72675	15344	75055	70797
28	14438	26339	79596	21314	80303	75480
29	24573	34557	86506	27275	85545	80157
30	34685	42759	93405	33229	90781	84829
	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9
31	44773	50945	000294	39174	96010	89497
32	54837	59116	07171	45111	201233	94159
33	64879	67272	14037	51040	06450	98816

z	400.	500.	600.	700.	800.	900.
	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9
34	374897	275413	020893	656961	211661	703469
35	84893	83538	27737	62873	16865	08116
36	94865	91648	34571	68778	22063	12758
37	404814	99743	41394	74675	27255	17396
38	14741	307823	48207	80564	32440	22028
39	24645	15888	55009	86444	37620	26656
40	34527	23938	61800	92317	42793	31279
41	44386	31973	68580	98182	47960	35896
42	54223	39993	75350	704039	53121	40509
43	64037	47998	82110	09888	58276	45117
44	73830	55989	88859	15729	63424	49720
45	83600	63965	95597	21563	68567	54318
46	93349	71926	102325	27388	73704	58911
47	503075	79873	09043	33206	78834	63500
48	12780	87806	15750	39016	83959	68083
49	22463	95723	22447	44818	89077	72662
50	32125	403627	29134	50613	94189	77236
51	41765	11516	35810	56399	99296	81805
52	51384	19391	42476	62178	304396	86369
53	60982	27251	49132	67950	09490	90929
54	70559	35098	55777	73713	14579	95484
55	80114	42930	62413	79470	19661	800034
56	89648	50748	69038	85218	24738	04579
57	99162	58552	75654	90959	29808	09119
58	608655	66342	82259	96692	34873	13655
59	18127	74118	88854	802418	39932	18186
60	27578	81880	95439	08136	44985	22712
61	37009	89629	202015	13847	50032	27234
62	46420	97363	08580	19550	55073	31751
63	55810	505084	15135	25245	60108	36263
64	65180	12791	21681	30934	65137	40770
65	74530	20484	28216	36614	70161	45273
66	83859	28164	34742	42288	75179	49771

z	400.	500.	600.	700.	800.	900.
	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9
67	693169	535831	241258	847954	380191	854265
68	702459	43483	47765	53612	85197	58754
69	11728	51123	54261	59263	90198	63238
70	20979	58749	60748	64907	95193	67717
71	30209	66361	67225	70544	400181	72192
72	39420	73960	73693	76173	05165	76663
73	48611	81546	80151	81795	10142	81128
74	57783	89119	86599	87410	15114	85590
75	66936	96678	93038	93017	20081	90046
76	76070	604225	99467	98617	25041	94498
77	85184	11758	305887	904210	29996	98946
78	94279	19278	12297	09796	34945	903389
79	803355	26786	18698	15375	39889	07827
80	12412	34280	25089	20946	44827	12261
81	21451	41761	31471	26510	49759	16690
82	30470	49230	37844	32068	54686	21115
83	39471	56686	44207	37618	59607	25535
84	48454	64128	50561	43161	64523	29951
85	57417	71559	56906	48697	69433	34362
86	66363	78976	63241	54225	74337	38769
87	75290	86381	69567	59747	79236	43172
88	84198	93773	75884	65262	84130	47569
89	93089	701153	82192	70770	89018	51963
90	901961	08520	88491	76271	93900	56352
91	10815	15875	94780	81765	98777	60737
92	19651	23217	401061	87252	503649	65117
93	28469	30547	07332	92732	08515	69492
94	37269	37864	13595	98205	13375	73864
	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	2,9
95	46052	45170	19848	003671	18230	78231
96	54817	52463	26092	09131	23080	82593
97	63564	59743	32328	14583	27924	86952
98	72293	67012	38554	20029	32763	91305
99	81005	74268	44772	25468	37597	95655

z	1000.	1100.	1200.	1300.	1400.	1500.
	3,0	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1
0	000000	413927	791812	139434	461280	760913
1	04341	17873	95430	42773	64381	63807
2	08677	21816	99045	46110	67480	66699
3	13009	25755	802656	49444	70577	69590
4	17337	29691	06265	52776	73671	72478
5	21661	33623	09870	56105	76763	75365
6	25980	37551	13473	59432	79853	78250
7	30295	41476	17073	62756	82941	81133
8	34605	45398	20669	66077	86027	84013
9	38912	49315	24263	69396	89110	86892
10	43214	53230	27854	72713	92191	89769
11	47512	57141	31441	76027	95270	92645
12	51805	61048	35026	79338	98347	95518
13	56094	64952	38608	82647	501422	98389
14	60380	68852	42187	85954	04494	801259
15	64660	72749	45763	89258	07564	04126
16	68937	76642	49336	92559	10633	06992
17	73210	80532	52906	95858	13699	09856
18	77478	84418	56473	99154	16762	12718
19	81742	88301	60037	202448	19824	15578
20	86002	92180	63598	05739	22883	18436
21	90257	96056	67157	09028	25941	21292
22	94509	99929	70712	12315	28996	24147
23	98756	503798	74265	15598	32049	26999
24	103000	07663	77814	18880	35100	29850
25	07239	11525	81361	22159	38149	32698
26	11474	15384	84905	25435	41195	35545
27	15704	19239	88446	28709	44240	38390
28	19931	23091	91984	31981	47282	41234
29	24154	26939	95519	35250	50322	44075
30	28372	30784	99051	38516	53360	46914
31	32587	34626	902581	41781	56396	49752
32	36797	38464	06107	45042	59430	52588
33	41003	42299	09631	48301	62462	55422

z	1000.	1100.	1200.	1300.	1400.	1500.
	3,0	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1
34	145205	546131	913152	251558	565492	858254
35	49403	49959	16670	54813	68519	61084
36	53598	53783	20185	58065	71544	63912
37	57788	57605	23697	61314	74568	66739
38	61974	61423	27206	64561	77589	69563
39	66155	65237	30713	67806	80608	72386
40	70333	69049	34217	71048	83625	75207
41	74507	72856	37718	74288	86640	78026
42	78677	76661	41216	77525	89653	80844
43	82843	80462	44711	80760	92663	83659
44	87005	84260	48204	83993	95672	86473
45	91163	88055	51694	87223	98678	89285
46	95317	91846	55180	90451	601683	92095
47	99467	95634	58665	93676	04685	94903
48	203613	99419	62146	96899	07686	97710
49	07755	603200	65624	300119	10684	900514
50	11893	06978	69100	03338	13680	03317
51	16027	10753	72573	06553	16674	06118
52	20157	14525	76043	09767	19666	08917
53	24284	18293	79511	12978	22656	11715
54	28406	22058	82975	16187	25644	14510
55	32525	25820	86437	19393	28630	17304
56	36639	29578	89896	22597	31614	20096
57	40750	33334	93353	25798	34596	22886
58	44857	37086	96806	28998	37575	25675
	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1	3,1
59	48960	40834	000257	32195	40553	28461
60	53059	44580	03705	35389	43529	31246
61	57154	48322	07151	38581	46502	34029
62	61245	52061	10594	41771	49474	36810
63	65333	55797	14034	44959	52443	39590
64	69416	59530	17471	48144	55411	42367
65	73496	63259	20905	51327	58376	45143
66	77572	66986	24337	54507	61340	47918

z	1000.	1100.	1200.	1300.	1400.	1500.
	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1	3,1
67	281644	670709	027766	357685	664301	950690
68	85713	74428	31193	60861	67261	53461
69	89777	78145	34616	64034	70218	56229
70	93838	81859	38037	67206	73173	58997
71	97895	85569	41456	70375	76127	61762
72	301948	89276	44871	73541	79078	64525
73	05997	92980	48284	76705	82027	67287
74	10043	96681	51694	79867	84975	70047
75	14085	700379	55102	83027	87920	72806
76	18123	04073	58507	86184	90864	75562
77	22157	07765	61909	89339	93805	78317
78	26188	11453	65309	92492	96744	81070
79	30214	15138	68705	95643	99682	83821
80	34238	18820	72100	98791	702617	86571
81	38257	22499	75491	401937	05551	89319
82	42273	26175	78880	05080	08482	92065
83	46285	29847	82267	08222	11412	94809
84	50293	33517	85650	11361	14339	97552
	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1	3,2
85	54297	37184	89031	14498	17265	000293
86	58298	40847	92410	17632	20188	03032
87	62295	44507	95785	20765	23110	05769
88	66289	48164	99159	23895	26029	08505
89	70279	51819	102529	27022	28947	11239
90	74265	55470	05897	30148	31863	13971
91	78248	59118	09262	33271	34776	16702
92	82226	62763	12625	36392	37688	19431
93	86202	66404	15985	39511	40598	22158
94	90173	70043	19343	42628	43506	24883
95	94141	73679	22698	45742	46412	27607
96	98106	77312	26050	48854	49316	30329
97	402066	80942	29400	51964	52218	33049
98	06023	84568	32747	55072	55118	35768
99	09977	88192	36092	58177	58016	38485
100	13927	91812	39434	61280	60913	41200

z	1600.	1700.	1800.	1900.	2000.	2100.
	3,2	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3
0	041200	304489	552725	787536	010300	222193
1	43913	07043	55137	89821	12471	24261
2	46625	09596	57548	92105	14641	26327
3	49335	12146	59957	94388	16809	28393
4	52044	14696	62365	96669	18977	30457
5	54750	17244	64772	98950	21144	32521
6	57455	19790	67177	801229	23309	34584
7	60159	22335	69582	03507	25474	36645
8	62860	24879	71984	05784	27637	38706
9	65560	27421	74386	08059	29799	40766
10	68259	29961	76786	10334	31961	42825
11	70955	32500	79185	12607	34121	44882
12	73650	35038	81582	14879	36280	46939
13	76344	37574	83978	17150	38438	48995
14	79035	40108	86373	19419	40595	51050
15	81725	42641	88766	21688	42751	53104
16	84414	45173	91158	23955	44905	55157
17	87100	47703	93549	26221	47059	57209
18	89785	50232	95939	28486	49212	59260
19	92468	52759	98327	30750	51363	61310
20	95150	55284	600714	33012	53514	63359
21	97830	57809	03099	35274	55663	65407
22	100508	60331	05484	37534	57812	67454
23	03185	62853	07867	39793	59959	69500
24	05860	65373	10248	42051	62105	71545
25	08534	67891	12629	44307	64250	73589
26	11205	70408	15008	46563	66394	75633
27	13876	72923	17385	48817	68537	77675
28	16544	75437	19762	51070	70680	79716
29	19211	77950	22137	53322	72820	81757
30	21876	80461	24511	55573	74960	83796
31	24540	82971	26883	57823	77099	85834
32	27202	85479	29255	60071	79237	87872
33	29862	87986	31625	62318	81374	89909

z	1600.	1700.	1800.	1900.	2000.	2100.
	3,2	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3
34	132521	390491	633993	864565	083509	291944
35	35178	92995	36361	66810	85644	93979
36	77833	95497	38727	69054	87778	96012
37	40487	97998	41092	71296	89910	98045
38	43139	400498	43455	73538	92042	300077
39	45790	02996	45817	75778	94172	02108
40	48438	05492	48178	78017	96302	04138
41	51086	07988	50538	80255	98430	06167
42	53732	10482	52896	82492	100557	08195
43	56376	12974	55253	84728	02684	10222
44	59018	15465	57609	86963	04809	12248
45	61659	17954	59964	89196	06933	14273
46	64298	20442	62317	91428	09056	16297
47	66936	22929	64669	93660	11178	18320
48	69572	25414	67020	95890	13100	20343
49	72207	27898	69369	98118	15420	22364
50	74839	30380	71717	900346	17539	24385
51	77471	32861	74064	02573	19657	26404
52	80100	35341	76410	04798	21774	28423
53	82729	37819	78754	07022	23889	30440
54	85355	40296	81097	09246	26004	32457
55	87980	42771	83439	11468	28118	34473
56	90603	45245	85780	13689	30231	36488
57	93225	47718	88119	15908	32343	38501
58	95845	50189	90457	18127	34454	40514
59	98464	52658	92794	20344	36563	42526
60	201081	55127	95129	22561	38672	44538
61	03696	57594	97464	24776	40780	46548
62	06310	60059	99797	26990	42887	48557
63	08922	62523	702129	29203	44992	50565
64	11533	64986	04459	31415	47097	52573
65	14142	67447	06788	33626	49201	54579
66	16750	69907	09116	35835	51303	56585

z	1600.	1700.	1800.	1900.	2000.	2100.
	3,2	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3
67	219356	472365	711443	938044	153405	358589
68	21960	74823	13769	40251	55505	60593
69	24563	77278	16093	42457	57605	62596
70	27165	79733	18416	44662	59703	64597
71	29764	82186	20738	46866	61801	66598
72	32363	84637	23058	49069	63898	68598
73	34959	87087	25378	51271	65993	70597
74	37555	89536	27696	53471	68088	72595
75	40148	91984	30013	55671	70181	74593
76	42740	94430	32328	57869	72273	76589
77	45331	96874	34643	60067	74365	78584
78	47920	99318	36956	62263	76455	80579
79	50507	501759	39268	64458	78545	82572
80	53093	04200	41578	66652	80633	84565
81	55677	06639	43888	68845	82721	86557
82	58260	09077	46196	71037	84807	88547
83	60841	11513	48503	73227	86893	90537
84	63421	13949	50809	75417	88977	92526
85	65999	16382	53114	77605	91061	94114
86	68576	18815	55417	79792	93143	96502
87	71151	21246	57719	81979	95224	98488
88	73724	23675	60020	84164	97305	400473
89	76296	26103	62320	86348	99384	02458
90	78867	28530	64618	88531	201463	04441
91	81436	30956	66915	90713	03540	06424
92	84004	33380	69211	92893	05617	08405
93	86570	35803	71506	95073	07692	10386
94	89134	38224	73800	97252	09767	12366
95	91697	40645	76092	99429	11840	14345
96	94258	43063	78383	001605	13913	16323
97	96818	45481	80673	03781	15984	18301
98	99377	47897	82962	05955	18055	20277
99	301934	50312	85250	08128	20124	22252

z	2200.	2300.	2400.	2500.	2600.	2700.
	3,3	3,3	3,3	3,3	3,4	3,4
0	424227	617278	802112	979400	149733	313638
1	26200	19166	03922	81137	51404	56246
2	28173	21053	05730	82873	53073	16853
3	30145	22939	07538	84608	54742	18460
4	32116	24825	09345	86343	56410	20067
5	34086	26709	11151	88077	58077	21673
6	36055	28593	12956	89811	59744	23278
7	38023	30476	14761	91543	61410	24883
8	39991	32358	16565	93275	63076	26487
9	41957	34239	18368	95007	64741	28090
10	43923	36120	20170	96737	66405	29693
11	45887	37999	21972	98467	68069	31295
	3,3	3,3	3,3	3,4	3,4	3,4
12	47851	39878	23773	000196	69732	32897
13	49814	41756	25573	01925	71394	34498
14	51776	43634	27373	03653	73056	36098
15	53737	45510	29171	05380	74717	37698
16	55698	47386	30969	07106	76377	39298
17	57657	49260	32767	08832	78037	40896
18	59615	51134	34563	10557	79696	42495
19	61573	53007	36359	12282	81355	44092
20	63530	54880	38154	14005	83013	45689
21	65486	56751	39948	15728	84670	47285
22	67441	58622	41741	17451	86327	48881
23	69395	60492	43534	19173	87983	50476
24	71348	62361	45326	20894	89638	52071
25	73300	64230	47117	22614	91293	53665
26	75252	66097	48908	24333	92947	55259
27	77202	67964	50698	26052	94601	56851
28	79152	69830	52487	27771	96254	58444
29	81101	71695	54275	29488	97906	60035
30	83049	73559	56063	31205	99557	61626
31	84996	75423	57850	32921	201208	63217
32	86942	77285	59636	34637	02859	64807
33	88887	79147	61421	36352	04509	66396

z	2200.	2300.	2400.	2500.	2600.	2700.
	3,3	3,3	3,3	3,4	3,4	3,4
34	490832	681009	863206	038066	206158	367985
35	92775	82869	64990	39780	07806	69573
36	94718	84728	66773	41492	09454	71161
37	96660	86587	68555	43205	11101	72748
38	98601	88445	70337	44916	12748	74334
39	500541	90302	72118	46627	14394	75920
40	02480	92159	73898	48337	16039	77506
41	04419	94014	75678	50047	17684	79090
42	06356	95869	77457	51755	19328	80675
43	08293	97723	79235	53464	20972	82258
44	10229	99576	81012	55171	22615	83841
45	12163	701428	82789	56878	24257	85423
46	14098	03280	84565	58584	25898	87005
47	16031	05131	86340	60289	27539	88587
48	17963	06981	88114	61994	29180	90167
49	19895	08830	89888	63698	30820	91747
50	21825	10679	91661	65402	32459	93327
51	23755	12526	93433	67105	34097	94906
52	25684	14373	95205	68807	35735	96484
53	27612	16219	86975	70508	37372	98062
54	29539	18065	98746	72209	39009	99639
55	31465	19909	900515	73909	40645	401216
56	33391	21753	02284	75608	42281	02792
57	35316	23596	04052	77307	43916	04368
58	37239	25438	05819	79005	45550	05943
59	39162	27279	07585	80703	47183	07517
60	41084	29120	09351	82400	48816	09091
61	43006	30960	11116	84096	50449	10664
62	44926	32799	12880	85791	52081	12237
63	46846	34637	14644	87486	53712	13809
64	48764	36475	16407	89180	55342	15380
65	50682	38311	18169	90874	56972	16951
66	52599	40147	19931	92567	58601	18522

z	2200.	2300.	2400.	2500.	2600.	2700.
	3,3	3,3	3,3	3,4	3,4	3,4
67	554515	741983	921691	094259	260230	420092
68	56431	43817	23452	95950	61858	21661
69	58345	45651	25211	97641	63486	23230
70	60259	47483	26970	99331	65113	24798
71	62171	49316	28727	101021	66739	26365
72	64083	51147	30485	02710	68365	27932
73	65994	52977	32241	04398	69990	29499
74	67905	54807	33997	06085	71614	31065
75	69814	56636	35752	07772	73238	32630
76	71723	58464	37506	09459	74861	34195
77	73630	60292	39260	11144	76484	35759
78	75537	62119	41013	12829	78106	37322
79	77443	63944	42765	14513	79727	38885
80	79348	65770	44517	16197	81348	40448
81	81253	67594	46268	17880	82968	42010
82	83156	69418	48018	19562	84588	43571
83	85059	71240	49767	21244	86207	45132
84	86961	73063	51516	22925	87825	46692
85	88862	74884	53264	24605	89443	48252
86	90762	76704	55011	26285	91060	49811
87	92662	78524	56758	27964	92677	51370
88	94560	80343	58504	29643	94293	52928
89	96458	82161	60249	31321	95908	54485
90	98355	83979	61993	32998	97523	56042
91	600251	85796	63737	34674	99137	57598
92	02146	87612	65480	36350	300751	59154
93	04041	89427	67223	38025	02364	60709
94	05934	91241	68964	39700	03976	62264
95	07827	93055	70705	41374	05588	63818
96	09719	94868	72446	43047	07199	65372
97	11610	96680	74185	44719	08809	66925
98	13500	98492	75924	46391	10419	68477
99	15390	800302	77662	48063	12029	70029

z	2800.	2900.	3000.	3100.	3200.	3300.
	3,4	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5
0	471580	623980	771213	913617	051500	185139
1	73131	25477	72660	15018	52857	86455
2	74681	26974	74107	16418	54213	87771
3	76231	28470	75553	17818	55569	89086
4	77780	29966	76999	19217	56925	90400
5	79329	31461	78445	20616	58280	91715
6	80877	32956	79890	22015	59635	93028
7	82424	34450	81334	23413	60990	94342
8	83971	35944	82778	24810	62344	95655
9	85517	37437	84222	26207	63697	96968
10	87068	38930	85665	27604	65050	98280
11	88608	40422	87108	29000	66043	99592
12	90153	41914	88550	30396	67755	200903
13	91697	43405	89991	31791	69107	02214
14	93241	44895	91432	33186	70459	03525
15	94784	46386	92873	34581	71810	04835
16	96327	47875	94313	35974	73160	06145
17	97868	49364	95753	37368	74511	07455
18	99410	50853	97192	38761	75860	08764
19	500951	52341	98631	40154	77210	10073
20	02491	53829	800069	41546	78559	11381
21	04031	55316	01507	42938	79907	12689
22	05570	56802	02945	44329	81255	13996
23	07109	58288	04381	45720	82603	15303
24	08647	59774	05818	47110	83950	16610
25	10185	61259	07254	48500	85297	17916
26	11722	62743	08689	49890	86644	19222
27	13258	64227	10124	51279	87990	20528
28	14794	65711	11559	52667	89335	21833
29	16329	67194	12993	54056	90080	23138
30	17864	68676	14426	55443	92025	24442
31	19399	70158	15859	56831	93370	25746
32	20932	71640	17292	58218	94713	27050
33	22466	73121	18724	59604	96057	28353

z	2800.	2900.	3000.	3100.	3200.	3300.
	3,4	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5
34	523998	674601	820156	960990	097400	229656
35	25531	76081	21587	62375	98743	30958
36	27062	77561	23018	63761	100085	32260
37	28593	79039	24448	65145	01427	33562
38	30124	80518	25878	66529	02768	34863
39	31654	81996	27307	67913	04109	36164
40	33183	83473	28736	69296	05450	37465
41	34712	84950	30164	70679	61790	38765
42	36241	86427	31592	72062	08130	40064
43	37769	87903	33020	73444	09469	41364
44	39296	89378	34446	74825	10808	42663
45	40823	90853	35873	76206	12147	43961
46	42349	92327	37299	77587	13485	45259
47	43875	93801	38725	78967	14823	46557
48	45400	95275	40150	80347	16160	47854
49	46924	96748	41574	81727	17497	49151
50	48449	98220	42998	83106	18834	50448
51	49972	99692	44422	84484	20170	51744
52	51495	701164	45845	85862	21505	53040
53	53018	02634	47268	87240	22841	54336
54	54540	04105	48690	88617	24175	55631
55	56061	05575	50112	89994	25510	56925
56	57582	07044	51533	91370	26844	58220
57	59102	08513	52954	92746	28178	59513
58	60622	09982	54375	94121	29511	60807
59	62142	11450	55795	95496	30844	62100
60	63660	12917	57214	96871	32176	63393
61	65179	14384	58633	98245	33508	64685
62	66696	15851	60052	99619	34840	65977
	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5	3,5
63	68213	17317	61470	000992	36171	67269
64	69730	18782	62888	02365	37502	68560
65	71246	20247	64305	03737	38832	69851
66	72762	21711	65722	05109	40162	71141

z	2800.	2900.	3000.	3100.	3200.	2300.
	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5	3,5
67	574277	723175	867138	006481	141491	272431
68	75791	24639	68554	07852	42820	73721
69	78305	26102	69969	09222	44149	75010
70	78819	27564	71384	10593	45478	76299
71	80332	29027	72798	11962	46805	77588
72	81844	30488	74212	13332	48133	78876
73	83356	31949	75626	14701	49460	80163
74	48867	33410	77039	16069	50787	81451
75	86378	34870	78451	17437	52113	82738
76	87889	36329	79863	18805	53439	84024
77	89399	37788	81275	20172	54764	85311
78	90908	39247	82686	21539	56089	86596
79	92417	40705	84097	22905	57414	87882
80	93925	42163	85507	24271	58738	89167
81	95433	43620	86917	25637	60062	90452
82	96940	45076	88326	27002	61386	91736
83	98446	46533	89735	28366	62709	93020
84	99953	47988	91144	29731	64031	94304
85	01458	49443	92552	31094	65354	95587
86	02963	50898	93959	32458	66676	96870
87	04468	52352	95366	33821	67997	98152
88	05972	53806	96773	35183	69318	99434
89	07475	55259	98179	36545	70639	300716
90	08978	56712	99585	37907	71959	01997
91	10481	58164	900990	39268	73279	03278
92	11983	59616	02395	40629	74598	04558
93	13484	61067	03799	41989	75917	05839
94	14985	62518	05203	43349	77236	07118
95	16486	63968	06607	44709	78554	08398
96	17986	65418	08010	46068	79872	09677
97	19485	66867	09412	47426	81189	10955
98	20984	68316	10814	48785	82507	12234
99	22482	69765	12216	50142	83823	13512

z	3400.	3500.	3600.	3700.	3800.	3900.
	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
0	314789	440680	563025	682017	797836	910646
1	16066	41921	64231	83191	98979	11760
2	17343	43161	65437	84364	800121	12873
3	18619	44401	66643	85537	01263	13986
4	19896	45641	67848	86710	02405	15098
5	21171	46880	69053	87882	03547	16210
6	22446	48119	70257	89054	04688	17322
7	23721	49358	71461	90226	05829	18434
8	24996	50596	72665	91397	06969	19546
9	26270	51834	73869	92568	08110	20657
10	27544	53071	75072	93739	09250	21768
11	28817	54308	76275	94910	10389	22878
12	30090	55545	77477	96080	11529	23988
13	31363	56781	78680	97249	12668	25098
14	32635	58018	79881	98419	13807	26208
15	33907	59253	81083	99588	14945	27318
16	35179	60489	82284	700757	16084	28427
17	36450	61724	83485	01926	17222	29536
18	37721	62958	84686	03094	18359	30644
19	38991	64193	85886	04262	19497	31753
20	40261	65427	87086	05429	20634	32861
21	41531	66660	88285	06597	21770	33968
22	42800	67894	89484	07764	22907	35076
23	44069	69126	90683	08930	24043	36183
24	45338	70359	91882	10097	25179	37290
25	46606	71591	93080	11263	26314	38397
26	47874	72823	94278	12429	27450	39503
27	49141	74055	95476	13594	28585	40609
28	50408	75286	96673	14759	29719	41715
29	51675	76517	97870	15924	30854	42820
30	52941	77747	99066	17088	31988	43926
31	54207	78977	600262	18252	33122	45030
32	55473	80207	01458	19416	34255	46135
33	56738	81436	02654	20580	35388	47239

z	3400.	3500.	3600.	3700.	3800.	3900.
	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
34	358003	482665	603849	721743	836521	948344
35	59267	83894	05044	22906	37654	49447
36	60532	85123	06239	24069	38786	50551
37	61795	86351	07433	25231	39918	51654
38	63059	87578	08627	26393	41050	52757
39	64322	88806	09821	27555	42181	53860
40	65584	90033	11014	28716	43312	54962
41	66847	91259	12207	29877	44443	56064
42	68109	92486	13399	31038	45574	57166
43	69370	93712	14592	32198	46704	58268
44	70631	94937	15784	33358	47834	59369
45	71892	96162	16975	34518	48963	60470
46	73153	97387	18167	35678	50093	61571
47	74413	98612	19358	36837	51222	62671
48	75673	99836	20548	37996	52351	63771
49	76932	501060	21739	39154	53479	64871
50	78191	02284	22929	40313	54607	65971
51	79450	03507	24118	41471	55735	67070
52	80708	04730	25308	42628	56863	68169
53	81966	05952	26497	43786	57990	69268
54	83223	07174	27685	44943	59117	70367
55	84481	08396	28874	46099	60244	71465
56	85737	09618	30062	47256	61370	72563
57	86994	10839	31250	48412	62496	73661
58	88250	12059	32437	49568	63622	74758
59	89506	13280	33624	50723	64748	75855
60	90761	14500	34811	51878	65873	76952
61	92016	15720	35997	53033	66998	78048
62	93271	16939	37183	54188	68123	79145
63	94525	18158	38369	55342	69247	80241
64	95779	19377	39555	56496	70371	81336
65	97032	20595	40740	57650	71495	82432
66	98286	21813	41925	53803	72618	83527

z	3400.	3500.	3600.	3700.	3800.	3900.
	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
67	399538	523031	643109	759956	873742	984622
68	400791	24248	44293	61109	74865	85717
69	02043	25465	45477	62261	75987	86811
70	03295	26682	46661	63414	77110	87905
71	04546	27899	47844	64565	78232	88999
72	05797	29115	49027	65717	79353	90092
73	07048	30330	50209	66868	80475	91186
74	08298	31545	51392	68019	81596	92279
75	09548	32760	52573	69170	82717	93371
76	10798	33975	53755	70320	83838	94464
77	12047	35189	54936	71470	84958	95556
78	13296	36403	56117	72620	86078	96648
79	14544	37617	57298	73769	87198	97739
80	15792	38830	58478	74918	88317	98831
81	17040	40043	59658	76067	89436	99922
	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,6
82	18288	41258	66838	77215	90555	001013
83	19535	42468	62017	78363	91674	02103
84	20781	43680	63196	79511	92792	03193
85	22028	44892	64375	80659	93910	04283
86	23274	46103	65553	81806	95028	05373
87	24519	47314	66731	82953	96145	06462
88	25765	48524	67909	84100	97262	07551
89	27010	49735	69087	85246	98379	08640
90	28254	50944	70264	86392	99496	09729
91	29498	52154	71440	87538	900612	10817
92	30742	53363	72617	88683	01728	11905
93	31986	54572	73793	89828	02844	12993
94	33229	55781	74969	90973	03959	14081
95	34472	56989	76144	92118	05075	15168
96	35714	58197	77320	93262	06189	16255
97	36956	59404	78495	94406	07304	17341
98	38198	60612	79669	95550	08418	18428
99	39439	61818	80843	96693	09532	19514

z	4000.	4100.	4200.	4300.	4400.	4500.
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
0	206000	127839	232493	334685	434527	532125
1	21686	28898	33527	35694	35514	33090
2	22771	29957	34560	36704	36500	34055
3	23856	31015	35594	37713	37487	35019
4	24941	32074	36627	38723	38473	35984
5	26025	33132	37660	39732	39459	36948
6	27109	34189	38693	40740	40445	37912
7	28193	35247	39725	41749	41431	38876
8	29277	36304	40757	42757	42416	39839
9	30361	37361	41789	43765	43401	40802
10	31444	38418	42821	44773	44386	41765
11	32527	39475	43852	45780	45371	42728
12	33609	40531	44884	46788	46355	43691
13	34692	41587	45915	47795	47339	44653
14	35774	42643	46945	48801	48323	45616
15	36855	43698	47976	49808	49307	46578
16	37937	44754	49006	50814	50291	47539
17	39018	45809	50036	51820	51274	48501
18	40099	46863	51066	52826	52257	49462
19	41180	47918	52095	53832	53240	50423
20	42261	48972	53125	54837	54223	51384
21	43341	50026	54154	55843	55205	52345
22	44421	51080	55182	56848	56187	53306
23	45500	52133	56211	57852	57169	54266
24	46580	53187	57239	58857	58151	55226
25	47659	54240	58267	59861	59133	56186
26	48738	55292	59295	60865	60114	57145
27	49816	56345	60322	61869	61095	58105
28	50895	57397	61350	62873	62076	59064
29	51973	58449	62377	63876	63057	60023
30	53050	59501	63404	64879	64037	60982
31	54128	60552	64430	65882	65018	61941
32	55205	61603	65457	66884	65998	62899
33	56282	62654	66483	67887	66977	63857

z	4000.	4100.	4200.	4300.	4400.	4500.
	3,5	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
34	057359	163705	267509	368889	467957	564815
35	58435	64755	68534	69891	68936	65773
36	59512	65805	69560	70893	69915	66730
37	60587	66855	70585	71894	70894	67688
38	61663	67905	71610	72895	71873	68645
39	62739	68954	72634	73897	72851	69602
40	63814	70003	73659	74897	73830	70559
41	64889	71052	74683	75898	74808	71515
42	65963	72101	75707	76898	75786	72471
43	67037	73149	76730	77898	76763	73427
44	68111	74197	77754	78898	77741	74383
45	69185	75245	78777	79898	78718	75339
46	70259	76293	79800	80897	79695	76294
47	71332	77340	80823	81896	80671	77250
48	72405	78387	81845	82895	81648	78205
49	73478	79434	82867	83894	82624	79159
50	74550	80481	83889	84893	83600	80114
51	75622	81527	84911	85891	84576	81068
52	76694	82573	85933	86889	85552	82023
53	77766	83619	86954	87887	86527	82977
54	78837	84665	87975	88884	87502	83930
55	79909	85710	88996	89882	88477	84884
56	80979	86755	90016	90879	89452	85837
57	82050	87800	91037	91876	90426	86790
58	83120	88845	92057	92872	91401	87743
59	84191	89889	93076	93869	92375	88696
60	85260	90933	94096	94865	93349	89648
61	86330	91977	95115	95861	94322	90601
62	87399	93021	96134	96857	95296	91553
63	88468	94064	97153	97852	96269	92505
64	89537	95107	98172	98847	97242	93456
65	90605	96150	99190	99842	98215	94408
66	91674	97193	300209	400837	99187	95359

z	4000.	4100.	4200.	4300.	4400.	4500.
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
67	092742	198235	301226	401832	500160	596310
68	93809	99277	02244	02826	01132	97261
69	94877	200319	03262	03820	02104	98212
70	95944	01361	04279	04814	03075	99162
71	97011	02402	05296	05808	04047	600112
72	98078	03443	06312	06802	05018	01062
73	99144	04484	07329	07795	05989	02012
74	100210	05524	08345	08788	06960	02962
75	01276	06565	09361	09781	07930	03911
76	02342	07605	10377	10773	08901	04860
77	03407	08645	11393	11765	09871	05809
78	04472	09684	12408	12758	10841	06758
79	05537	10724	13423	13749	11811	07706
80	06602	11763	14438	14741	12780	08655
81	07666	12802	15452	15733	13749	09603
82	08730	13840	16467	16724	14719	10551
83	09794	14879	17481	17715	15687	11499
84	10857	15917	18495	18705	16656	12446
85	11921	16955	19508	19696	17624	13393
86	12984	17992	20522	20686	18593	14341
87	14046	19030	21535	21676	19561	15287
88	15109	20067	22548	22666	20528	16234
89	16171	21104	23560	23656	21496	17181
90	17233	22140	24573	24645	22463	18127
91	18295	23177	25585	25634	23431	19073
92	19356	24213	26597	26623	24397	20019
93	20417	25249	27609	27612	25364	20964
94	21478	26284	28620	28601	26331	21910
95	22539	27320	29632	29589	27297	22855
96	23599	28355	30643	30577	28263	23800
97	24660	29390	31654	31565	29229	24745
98	25720	30424	32664	32552	30195	25690
99	26779	31459	33674	33540	31160	26634

z	4600.	4700.	4800.	4900.	5000.	5100.
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,7
0	627578	720979	812412	901961	989700	075702
1	28522	21903	13317	02847	90569	76553
2	29466	22826	14222	03733	91437	77405
3	30410	23750	15126	04619	92305	78256
4	31353	24673	16030	05505	93173	79107
5	32296	25596	16934	06390	94041	79957
6	33239	26519	17838	07275	94908	80808
7	34182	27442	18741	08161	95776	81659
8	35125	28365	19645	09046	96643	82509
9	36067	29287	20548	09930	97510	83359
10	37009	30209	21451	10815	98377	84209
11	37951	31131	22354	11699	99244	85059
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,7	3,7
12	38893	32053	23256	12584	000111	85908
13	39835	32974	24159	13468	00977	86758
14	40776	33896	25061	14352	01843	87607
15	41717	34817	25963	15235	02709	88456
16	42658	35738	26865	16119	03575	89305
17	43599	36659	27766	17002	04441	90154
18	44539	37579	28668	17885	05307	91003
19	45480	38500	29569	18768	06172	91851
20	46420	39420	30470	19651	07037	92700
21	47360	40340	31371	20534	07902	93548
22	48299	41260	32272	21416	08767	94396
23	49239	42179	33173	22298	09632	95244
24	50178	43099	34073	23180	10496	96091
25	51117	44018	34973	24062	11361	96939
26	52056	44937	35873	24944	12225	97786
27	52995	45856	36773	25826	13089	98633
28	53934	46775	37673	26707	13953	99480
29	54872	47693	38572	27588	14816	100327
30	55810	48611	39471	28469	15680	01174
31	56748	49529	40370	29350	16543	02020
32	57686	50447	41269	30231	17406	02866
33	58623	51365	42168	31111	18269	03713

z	4600.	4700.	4800.	4900.	5000.	5100.
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,7	3,7
34	659560	752283	843066	931991	019132	104559
35	60497	53200	43965	32872	19995	05404
36	61434	54117	44863	33752	20857	06250
37	62371	55034	45761	34631	21720	07096
38	63307	55951	46659	35511	22582	07941
39	64244	56867	47556	36390	23444	08786
40	65180	57783	48454	37269	24305	09631
41	66116	58700	49351	38148	25167	10476
42	67051	59615	50248	39027	26028	11321
43	67987	60531	51145	39906	26890	12165
44	68922	61447	52041	40785	27751	13010
45	69857	62362	52938	41663	28612	13854
46	70792	63277	53834	42541	29472	14698
47	71727	64192	54730	43419	30333	15542
48	72661	65107	55626	44297	31193	16385
49	73595	66022	56522	45175	32054	17229
50	74530	66936	57417	46052	32914	18072
51	75463	67850	58313	46929	33774	18915
52	76397	68764	59208	47806	34633	19759
53	77331	69678	60103	48683	35493	20601
54	78264	70592	60998	49560	36352	21444
55	79197	71505	61892	50437	37212	22287
56	80130	72418	62787	51313	38071	23129
57	81062	73332	63681	52189	38930	23971
58	81995	74244	64575	53065	39788	24813
59	82927	75157	65469	53941	40647	25655
60	83859	76070	66363	54817	41505	26497
61	84791	76982	67256	55692	42363	27339
62	85723	77894	68150	56568	43221	28180
63	86654	78806	69043	57443	44079	29021
64	87585	79718	69936	58318	44937	29862
65	88516	80629	70828	59193	45794	30703
66	89447	81540	71721	60067	46652	31544

z	4600.	4700.	4800.	4900.	5000.	5100.
	3,6	3,6	3,6	3,6	3,7	3,7
67	690378	782452	872613	960942	047509	132385
68	91308	83362	73506	61816	48366	33225
69	92239	84273	74398	62690	49223	34065
70	93169	85184	75290	63564	50080	34905
71	94099	86094	76181	64438	50936	35745
72	95028	87004	77073	65311	51792	36585
73	95958	87914	77964	66185	52649	37425
74	96887	88824	78855	67058	53505	38264
75	97816	89734	79746	67931	54360	39104
76	98745	90643	80637	68804	55216	39943
77	99674	91552	81528	69676	56072	40782
78	700602	92461	82418	70549	56927	41620
79	01530	93370	83308	71421	57782	42459
80	02459	94279	84198	72293	58637	43298
81	03386	85187	95088	73165	59492	44136
82	04314	96096	85978	74037	60347	44974
83	05242	97004	86867	74909	61201	45812
84	06169	97912	87757	75780	62055	46650
85	07096	98819	88646	76652	62910	47488
86	08023	99727	89535	77523	63764	48325
87	08950	800634	90423	78394	64617	49162
88	09876	01541	91312	79264	65471	50000
89	10802	02448	92200	80135	66325	50837
90	11728	03355	93089	81005	67178	51674
91	12654	04262	93977	81876	68031	52510
92	13580	05168	94864	82746	68884	53347
93	14506	06074	95752	83616	69737	54183
94	15431	06980	96640	84485	70589	55019
95	16356	07886	97527	85355	71442	55856
96	17281	08792	98414	86224	72294	56691
97	18206	09697	99301	87093	73146	57527
98	19130	10602	900188	87963	73998	58363
99	20054	11507	01074	88831	74850	59198

z	5200.	5300.	5400.	5500.	5600.	5700.
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7
0	160033	242759	323938	403627	481880	558749
1	60869	43578	24742	04416	82656	59510
2	61703	44397	25546	05206	83431	60272
3	62538	45216	26350	05995	84206	61034
4	63373	46035	27153	06784	84981	61795
5	64207	46854	27957	07573	85756	62556
6	65042	47672	28760	08362	86531	63318
7	65876	48491	29564	09151	87306	64079
8	66710	49309	30367	09939	88080	64840
9	67544	50127	31170	10728	88854	65600
10	68377	50945	31973	11516	89629	66361
11	69211	51763	32775	12304	90403	67122
12	70044	52581	33578	13092	91177	67882
13	70877	53398	34380	13880	91950	68642
14	71710	54216	35183	14668	92724	69402
15	72543	55033	35985	15455	93498	70162
16	73376	55850	36787	16243	94271	70922
17	74208	56667	37588	17030	95044	71682
18	75041	57483	38390	17817	95317	72442
19	75873	58300	39192	18604	96590	73201
20	76705	59116	39993	19391	97363	73960
21	77537	59933	40794	20177	98136	74719
22	78369	60749	41595	20964	98908	75479
23	79200	61565	42396	21750	99681	76237
24	80032	62380	43197	22537	500453	76996
25	80863	63196	43997	23323	01225	77755
26	81694	64012	44798	24109	01997	78513
27	82525	64827	45598	24895	02769	79272
28	83356	65642	46398	25680	03541	80030
29	84186	66457	47198	26466	04312	80788
30	85017	67272	47998	27251	05084	81546
31	85847	68087	48798	28037	05855	82304
32	86677	68901	49598	28822	06626	83062
33	87507	69716	50397	29607	07398	83819

z	5200.	5300.	5400.	5500.	5600.	5700.
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7
34	188337	270530	351196	430392	508168	584577
35	89167	71344	51995	31176	08939	85334
36	89996	72158	52794	31961	09710	86091
37	90826	72972	53593	32745	10480	86848
38	91655	73786	54392	33530	11251	87605
39	92484	74599	55191	34314	12021	88362
40	93313	75413	55989	35098	12791	89119
41	94142	76226	56787	35882	13561	89875
42	94970	77039	57585	36665	14331	90632
43	95799	77852	58383	37449	15101	91388
44	96627	78664	59181	38232	15870	92144
45	97455	79477	59979	39016	16639	92900
46	98283	80290	60776	39799	17409	93656
47	99111	81102	61574	40582	18178	94412
48	99938	81914	62371	41365	18947	95168
49	200766	82726	63168	42147	19716	95923
50	01593	83538	63965	42930	20484	96678
51	02420	84359	64762	43712	21253	97434
52	03247	85161	65558	44495	22022	98189
53	04074	85972	66355	45277	22790	98944
54	04901	86784	67151	46059	23558	99699
55	05727	87595	67948	46841	24326	600453
56	06554	88406	68744	47622	25094	01208
57	07380	89216	69540	48404	25862	01962
58	08206	90027	70335	49185	26629	02717
59	09032	90838	71131	49967	27397	03471
60	09857	91648	71926	50748	28164	04225
61	10683	92458	72722	51529	28932	04979
62	11508	93268	73517	52310	29699	05733
63	12334	94078	74312	53091	30466	06486
64	13159	94888	75107	53871	31232	07240
65	13984	95697	75902	54652	31999	07993
66	14809	96507	76696	55432	32766	08746

z	5200.	5300.	5400.	5500.	5600.	5700.
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7
67	215633	297316	377491	456212	533532	609500
68	16458	98125	78285	56992	34298	10253
69	17282	98934	79079	57772	35065	11005
70	18106	99743	79873	58552	35831	11758
71	18930	300551	80667	59332	36596	12511
72	19754	01360	81461	60111	37362	13263
73	20578	02168	82254	60890	38128	14016
74	21401	02977	83048	61670	38893	14768
75	22225	03785	83841	62449	39659	15520
76	23048	04593	84634	63228	40424	16272
77	23871	05400	85427	64006	41189	17024
78	24694	06208	86220	64785	41954	17775
79	25517	07015	87013	65564	42719	18527
80	26339	07823	87806	66342	43483	19278
81	27162	08630	88598	67120	44248	20030
82	27984	09437	89390	67898	45012	20781
83	28806	10244	90182	68676	45777	21532
84	29628	11051	90974	69454	46541	22283
85	30450	11857	91766	70232	47305	23034
86	31272	12663	92558	71009	48069	23784
87	32093	13470	93350	71787	48832	24535
88	32914	14276	94141	72564	49596	25285
89	33736	15082	94932	73341	50359	26035
90	34557	15888	95723	74118	51123	26786
91	35378	16693	96514	74895	51886	27536
92	36198	17499	97305	75672	52649	28286
93	37019	18304	98096	76448	53412	29035
94	37839	19109	98887	77225	54175	29785
95	38660	19914	99677	78001	54937	30534
96	39480	20719	400467	78777	55700	31284
97	40300	21524	01257	79553	56462	32033
98	41120	22329	02047	80329	57224	32782
99	41939	23133	02837	81105	57987	33531

z	5800.	5900.	6000.	6100.	6200.	6300.
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7
0	634280	708520	781513	853298	923917	993405
1	35029	09256	82236	54010	24617	94095
2	35777	09992	82960	54722	25318	94784
3	36526	10728	83683	55434	26018	95473
4	37274	11463	84407	56145	26718	96162
5	38022	12199	85130	56857	27418	96851
6	38770	12934	85853	57568	28118	97540
7	39518	13670	86576	58279	28817	98228
8	40266	14405	87299	58990	29517	98917
9	41014	15140	88022	59701	30217	99605
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,8
10	41761	15875	88745	60412	30916	000294
11	42509	16610	89467	61123	31615	00982
12	43256	17344	90190	61833	32314	01670
13	44003	18079	90912	62544	33014	02358
14	44750	18813	91634	63254	33712	03046
15	45497	19547	92356	63965	34411	03734
16	46244	20282	93078	64675	35110	04421
17	46991	21016	93800	65385	35809	05109
18	47737	21750	94522	66095	36507	05796
19	48484	22483	95243	66805	37206	06484
20	49230	23217	95965	67514	37904	07171
21	49976	23951	96686	68224	38602	07858
22	50722	24684	97408	68933	39300	08545
23	51468	25417	98129	69643	39998	09232
24	52214	26150	98850	70352	40696	09919
25	52959	26884	99571	71061	41394	10605
26	53705	27616	800291	71770	42091	11292
27	54450	28349	01012	72479	42789	11978
28	55195	29082	01732	73188	43486	12665
29	55941	29815	02453	73896	44183	13351
30	56686	30547	03173	74605	44880	14037
31	57430	31279	03893	75313	45578	14723
32	58175	32011	04613	76021	46274	15409
33	58920	32743	05333	76730	46971	16095

z	5800.	5900.	6000.	6100.	6200.	6300.
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,8
34	659664	733475	806053	877438	947668	016781
35	60409	34207	06773	78146	48365	17466
36	61153	34939	07492	78854	49061	18152
37	61897	35670	08212	79561	49757	18837
38	62641	36402	08931	80269	50454	19522
39	63385	37133	09650	80976	51150	20208
40	64128	37864	10369	81684	51846	20893
41	64872	38596	11088	82391	52542	21578
42	55616	39326	11807	83098	53238	22262
43	66359	40057	12526	83805	53933	22947
44	67102	40788	13245	84512	54629	23632
45	67845	41519	13963	85219	55324	24316
46	68588	42249	14681	85926	56020	25001
47	69331	42979	15400	86632	56715	25685
48	70074	43710	16118	87339	57410	26369
49	70816	44440	16836	88045	58105	27053
50	71559	45170	17554	88751	58800	27737
51	72301	45900	18272	89457	59495	28421
52	73043	46629	18989	90163	60190	29105
53	73785	47359	19707	90869	60884	29789
54	74527	48088	20424	91575	61579	30472
55	75269	48818	21141	92281	62273	31156
56	76011	49547	21859	92986	62967	31839
57	76752	50276	22576	93691	63662	32522
58	77494	51005	23293	94397	64356	33205
59	78235	51734	24010	95102	65050	33888
60	78976	52463	24726	95807	65743	34571
61	79717	53191	25443	96512	66437	35254
62	80458	53920	26159	97217	67131	35937
63	81199	54648	26876	97922	67824	36619
64	81940	55376	27592	98626	68517	37302
65	82680	56104	28308	99331	69211	37984
66	83421	56832	29024	900035	69904	38666

z	5800.	5900.	6000.	6100.	6200.	6300.
	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,8
67	684161	757560	829740	900739	970597	039348
68	84901	58288	30456	01444	71290	40031
69	85641	59016	31171	02148	71983	40712
70	86381	59743	31887	02852	72675	41391
71	87121	60471	32602	03555	73368	42076
72	87860	61198	33318	04259	74060	42758
73	88600	61925	34033	04963	74753	43439
74	89339	62652	34748	05666	75445	44121
75	90079	63379	35463	06370	76137	44802
76	90818	64106	36178	07073	76829	45483
77	91557	64833	36892	07776	77521	46164
78	92296	65559	37607	08479	78213	46845
79	93035	66286	38321	09182	78905	47526
80	93773	67012	39036	09885	79596	48207
81	94512	67738	39750	10587	80288	48887
82	95250	68464	40464	11290	80979	49568
83	95988	69190	41178	11992	81671	50248
84	96727	69916	41892	12695	82362	50929
85	97465	70642	42606	13397	83053	51609
86	98203	71367	43319	14099	83744	52289
87	98940	72093	44033	14801	84435	52969
88	99678	72818	44746	15503	85125	53649
89	700416	73543	45460	16205	85816	54329
90	01153	74268	46173	16906	86506	55009
91	01890	74993	46886	17608	87197	55688
92	02627	75718	47599	18309	87887	56368
93	03364	76443	48312	19011	88577	57047
94	04101	77167	49024	19712	89267	57726
95	04838	77892	49737	20413	89957	58405
96	05575	78616	50450	21114	90647	59085
97	06311	79340	51162	21815	91337	59764
98	07048	80065	51874	22516	92027	60442
99	07784	80789	52586	23216	92716	61121

z	6400.	6500.	6600.	6700.	6800.	6900.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
0	061800	129134	195439	260748	325089	388491
1	62478	29802	96097	61396	25728	89120
2	63157	30470	96755	62044	26366	89750
3	63835	31138	97413	62692	27005	90379
4	64513	31805	98071	63340	27643	91008
5	65191	32473	98728	63988	28281	91637
6	65869	33141	99386	64635	28919	92266
7	66547	33808	200043	65283	29558	92895
8	67225	34475	00700	65931	30195	93523
9	67903	35143	01358	66578	30833	94152
10	68580	35810	02015	67225	31471	94780
11	69258	36477	02672	67872	32109	95409
12	69935	37144	03328	68519	32746	96037
13	70612	37811	03985	69166	33384	96666
14	71290	38478	04642	69813	34021	97294
15	71967	39144	05298	70460	34659	97922
16	72644	39811	05955	71107	35296	98550
17	73320	40477	06611	71753	35933	99178
18	73997	41144	07268	72400	36570	99806
19	74674	41810	07924	73046	37207	400433
20	75350	42476	08580	73693	37844	01061
21	76027	43142	09236	74339	38480	01688
22	76703	43808	09892	74985	39117	02316
23	77379	44474	10548	75631	39754	02943
24	78055	45140	11203	76277	40390	03571
25	78731	45805	11859	76923	41027	04198
26	79407	46471	12514	77569	41663	04825
27	80083	47136	13170	78214	42299	05452
28	80759	47801	13825	78860	42935	06079
29	81434	48467	14480	79505	43571	06706
30	82110	49132	15135	80151	44207	07332
31	82785	49797	15790	80796	44843	07959
32	83460	50462	16445	81441	45479	08586
33	84136	51127	17100	82086	46114	09212

z	6400.	6500.	6600.	6700.	6800.	6900.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
34	084811	151791	217755	282731	346750	409838
35	85486	52456	18409	83376	47385	10465
36	86160	53120	19064	84021	48021	11091
37	86835	53785	19718	84665	48656	11717
38	87510	54449	20372	85310	49291	12343
39	88184	55113	21027	85955	49926	12969
40	88859	55777	21681	86599	50561	13595
41	89533	56441	22335	87243	51196	14220
42	90207	57105	22989	87887	51831	14846
43	90881	57769	23643	88532	52465	15472
44	91555	58433	24296	89176	53100	16097
45	92229	59097	24950	89820	53735	16723
46	92903	59760	25603	90463	54369	17348
47	93577	60423	26257	91107	55003	17973
48	94250	61087	26910	91751	55638	18598
49	94924	61750	27563	92394	56272	19223
50	95597	62413	28216	93038	56906	19848
51	96270	63076	28869	93681	57540	20473
52	96944	63739	29522	94324	58174	21098
53	97617	64402	30175	94967	58807	21722
54	98290	65064	30828	95611	59441	22347
55	98962	65727	31481	96254	60075	22971
56	99635	66389	32133	96896	60708	23596
57	100308	67052	32786	97539	61341	24220
58	00980	67714	33438	98182	61975	24844
59	01653	68376	34090	98824	62608	25468
60	02325	69038	34742	99467	63241	26092
61	02997	69700	35394	300109	63874	26716
62	03670	70362	36046	00752	64507	27340
63	04342	71024	36698	01394	65140	27964
64	05013	71686	37350	02036	65773	28588
65	05685	72347	38002	02678	66405	29211
66	06357	73009	38653	03320	67038	29835

z	6400.	6500.	6600.	6700.	6800.	6900.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
67	107029	173670	239305	303962	367670	430458
68	07700	74331	39956	04604	68303	31081
69	08372	74993	40607	05245	68935	31705
70	09043	75654	41258	05887	69567	32328
71	09714	76315	41909	06528	70199	32951
72	10385	76976	42560	07169	70832	33574
73	11056	77636	43211	07811	71463	34197
74	11727	78297	43862	08452	72095	34819
75	12398	78958	44513	09093	72727	35442
76	13068	79618	45163	09734	73359	36065
77	13739	80278	45814	10375	73990	36687
78	14409	80939	46464	11016	74622	37310
79	15080	81599	47114	11656	75253	37932
80	15750	82259	47765	12297	75884	38554
81	16420	82919	48415	12937	76516	39176
82	17090	83579	49065	13578	77147	39798
83	17760	84239	49715	14218	77778	40420
84	18430	84898	50364	14858	78409	41042
85	19100	85558	51014	15499	79039	41664
86	19769	86217	51664	16139	79670	42286
87	20439	86877	52313	16778	80301	42907
88	21108	87536	52963	17418	80931	43529
89	21778	88195	53612	18058	81562	44150
90	22447	88854	54261	18698	82192	44772
91	23116	89513	54910	19337	82822	45393
92	23785	90172	55559	19977	83453	46014
93	24454	90831	56208	20616	84083	46635
94	25123	91489	56857	21255	84713	47256
95	25792	92148	57506	21895	85343	47877
96	26460	92806	58154	22534	85973	48498
97	27129	93465	58803	23173	86602	49119
98	27797	94123	59451	23812	87232	49739
99	28465	94781	60100	24450	87861	50360

z	7000.	7100.	7200.	7300.	7400.	7500.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
0	450980	512583	573325	633229	692317	750613
1	51601	13195	73928	33823	92904	51192
2	52221	13807	74531	34418	93491	51771
3	52841	14418	75134	35013	94077	52349
4	53461	15030	75737	35608	94664	52928
5	54081	15641	76340	36202	95251	53507
6	54701	16252	76943	36797	95837	54086
7	55321	16863	77545	37391	96423	54664
8	55941	17474	78148	37985	97010	55243
9	56561	18085	78750	38580	97596	55821
10	57180	18696	79353	39174	98182	56399
11	57800	19307	79955	39768	98768	56978
12	58419	19917	80557	40362	99354	57556
13	59038	20528	81159	40956	99940	58134
14	59658	21139	81761	41550	700526	58712
15	60277	21749	82363	42143	01112	59290
16	60896	22359	82965	42737	01697	59868
17	61515	22970	83567	43331	02283	60446
18	62134	23580	84169	43924	02868	61023
19	62752	24190	84770	44517	03454	61601
20	63371	24800	85372	45111	04039	62178
21	63990	25410	85973	45704	04624	62756
22	64608	26020	86575	46297	05210	63333
23	65227	26629	87176	46890	05795	63911
24	65845	27239	87777	47483	06380	64488
25	66463	27849	88379	48076	06965	65065
26	67081	28458	88980	48669	07549	65642
27	67700	29068	89581	49262	08134	66219
28	68318	29677	90181	49855	08719	66796
29	68935	30286	90782	50447	09304	67373
30	69553	30895	91383	51040	09888	67950
31	70171	31504	91984	51632	10473	68526
32	70789	32113	92584	52225	11057	69103
33	71406	32722	93185	52817	11641	69680

z	7000.	7100.	7200.	7300.	7400.	7500.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
34	472024	533331	593785	653409	712226	770256
35	72641	33940	94385	54001	12810	70833
36	73258	34548	94986	54593	13394	71409
37	73876	35157	95586	55185	13978	71985
38	74493	35765	96186	55777	14562	72561
39	75110	36374	96786	56369	15146	73137
40	75727	36982	97386	56961	15729	73713
41	76343	37590	97985	57552	16313	74289
42	76960	38198	98585	58144	16897	74865
43	77577	38807	99185	58735	17480	75441
44	78193	39414	99784	59327	18064	76017
45	78810	40022	600384	59918	18647	76592
46	79426	40630	00983	60509	19230	77168
47	80043	41238	01583	61100	19814	77743
48	80659	41845	02182	61691	20397	78319
49	81275	42453	02781	62282	20980	78894
50	81891	43060	03380	62873	21563	79470
51	82507	43668	03979	63464	22146	80045
52	83123	44275	04578	64055	22728	80620
53	83739	44882	05177	64646	23311	81195
54	84355	45489	05776	65236	23894	81770
55	84970	46096	06374	65827	24476	82345
56	85586	46703	06973	66417	25059	82919
57	86201	47310	07571	67008	25641	83494
58	86817	47917	08170	67598	26224	84069
59	87432	48524	08768	68188	26806	84643
60	88047	49130	09366	68778	27388	85218
61	88662	49737	09964	69368	27970	85792
62	89277	50343	10562	69958	28552	86367
63	89892	50950	11160	70548	29134	86941
64	90507	51556	11758	71138	29716	87515
65	91122	52162	12356	71728	30298	88089
66	91736	52768	12954	72317	30880	88663

z	7000.	7100.	7200.	7300.	7400.	7500.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
67	492351	553374	613552	672907	731461	789237
68	92965	53980	14149	73496	32043	89811
69	93580	54586	14747	74086	32625	90385
70	94194	55192	15344	74675	33206	90959
71	94808	55797	15941	75264	33787	91532
72	95423	56403	16539	75853	34369	92106
73	96037	57008	17136	76442	34950	92680
74	96651	57614	17733	77031	35531	93253
75	97264	58219	18330	77620	36112	93826
76	97878	58824	18927	78209	36693	94400
77	98492	59429	19524	78798	37274	94973
78	99106	60035	20121	79387	37855	95546
79	99719	60640	20717	79975	38435	96119
80	500333	61244	21314	80564	39016	96692
81	00946	61849	21910	81152	39597	97265
82	01559	62454	22507	81740	40177	97838
83	02172	63059	23103	82329	40757	98411
84	02786	63663	23699	82917	41338	98983
85	03399	64268	24296	83505	41918	99556
86	04011	64872	24892	84093	42498	800128
87	04624	65476	25488	84681	43078	00701
88	05237	66081	26084	85269	43658	01273
89	05850	66685	26680	85857	44238	01846
90	06462	67289	27275	86444	44818	02418
91	07075	67893	27871	87032	45398	02990
92	07687	68497	28467	87620	45978	03562
93	08300	69101	29062	88207	46557	04134
94	08912	69704	29658	88794	47137	04706
95	09524	70308	30253	89382	47716	05278
96	10136	70912	30848	89969	48296	05850
97	10748	71515	31443	90556	48875	06421
98	11360	72118	32039	91143	49454	06993
99	11972	72722	32634	91730	50034	07564

z	7600.	7700.	7800.	7900.	8000.	8100.
	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
0	808136	864907	920946	976271	030900	084850
1	08707	65471	21503	76821	31443	85386
2	09279	66035	22059	77370	31985	85922
3	09850	66599	22616	77920	32528	86458
4	10421	67163	23173	78469	33071	86994
5	10992	67726	23729	79019	33613	87530
6	11563	68290	24285	79568	34156	88066
7	12134	68854	24842	80117	34698	88602
8	12705	69417	25398	80667	35241	89137
9	13276	69980	25954	81216	35783	89673
10	13847	70544	26510	81765	36325	90209
11	14417	71107	27066	82314	36867	90744
12	14988	71670	27622	82863	37409	91279
13	15558	72233	28178	83412	37951	91815
14	16129	72796	28734	83960	38493	92350
15	16699	73359	29290	84509	39035	92885
16	17269	73922	29846	85058	39577	93420
17	17840	74485	30401	85606	40119	93955
18	18410	75048	30957	86155	40661	94490
19	18980	75610	31512	86703	41202	95025
20	19550	76173	32068	87252	41744	95560
21	20120	76736	32623	87800	42285	96095
22	20689	77298	33178	88348	42827	96630
23	21259	77860	33733	88897	43368	97165
24	21829	78423	34288	89445	43909	97699
25	22398	78985	34843	89993	44450	98234
26	22968	79547	35398	90541	44992	98768
27	23537	80109	35953	91089	45533	99303
28	24107	80671	36508	91636	46074	99837
29	24676	81233	37063	92184	46615	100371
30	25245	81795	37618	92732	47155	00905
31	25815	82357	38172	93279	47696	01440
32	26384	82918	38727	93827	48237	01974
33	26953	83480	39281	94375	48778	02508

z	7600.	7700.	7800.	7900.	8000.	8100.
	3,8	3,8	3,8	3,8	8,9	3,9
34	827522	884042	939836	994922	049318	103042
35	28090	84603	40390	95469	49859	03576
36	28659	85165	40944	96017	50399	04109
37	29228	85726	41498	96564	50940	04643
38	29797	86287	42053	97111	51480	05177
39	30365	86848	42607	97658	52020	05710
40	30934	87410	43161	98205	52560	06244
41	31502	87971	43715	98752	53101	06778
42	32070	88532	44268	99299	53641	07311
43	32639	89093	44822	99846	54181	07844
	3,8	3,8	3,8	3,9	3,9	3,9
44	33207	89653	45376	000392	54721	08378
45	33775	90214	45929	00939	55260	08911
46	34343	90775	46483	01486	55800	09444
47	34911	91336	47037	02032	56340	09977
48	35479	91896	47590	02579	56880	10510
49	36047	92457	48143	03125	57419	11043
50	36614	93017	48697	03671	57959	11576
51	37182	93577	49250	04218	58498	12109
52	37750	94138	49803	04764	59038	12642
53	38317	94698	50356	05310	59577	13174
54	38885	95258	50909	05856	60116	13707
55	39452	95818	51462	06402	60655	14240
56	40019	96378	52015	06948	61195	14772
57	40586	96938	52568	07494	61734	15305
58	41154	97498	53120	08039	62273	15837
59	41721	98058	53673	08585	62812	16369
60	42288	98617	54225	09131	63350	16902
61	42855	99177	54778	09676	63889	17434
62	43421	99736	55330	10222	64428	17966
63	43988	900296	55883	10767	64967	18498
64	44555	00855	56435	11313	65505	19030
65	45122	01415	56987	11858	66044	19562
66	45688	01974	57539	12403	66582	20094

z	7600.	7700.	7800.	7900.	8000.	8100.
	3,8	3,8	3,8	3,9	3,9	3,9
67	846255	902533	958092	012948	067121	120626
68	46821	03092	58644	13493	67659	21157
69	47387	03651	59195	14038	68197	21689
70	47954	04210	59747	14583	68735	22221
71	48520	04769	60299	15128	69273	22752
72	49086	05328	60851	15673	69812	23284
73	49652	05887	61403	16218	70350	23815
74	50218	06445	61954	16762	70887	24346
75	50784	07004	62506	17307	71425	24878
76	51350	07563	63057	17851	71963	25409
77	51915	08121	63608	18396	72501	25940
78	52481	08679	64160	18940	73038	26471
79	53047	09238	64711	19485	73576	27002
80	53612	09796	65262	20029	74114	27533
81	54178	10354	65813	20573	74651	28064
82	54743	10912	66364	21117	75188	28595
83	55308	11470	66915	21661	75726	29126
84	55874	12028	67466	22205	76263	29656
85	56439	12586	68017	22749	76800	30187
86	57004	13144	68568	23293	77337	30717
87	57569	13702	69118	23837	77874	31248
88	58134	14259	69669	24381	78411	31778
89	58699	14817	70220	24924	78948	32309
90	59263	15375	70770	25468	79485	32839
91	59828	15932	71320	26011	80022	33369
92	60393	16489	71871	26555	80559	33899
93	60957	17047	72421	27098	81095	34430
94	61522	17604	72971	27641	81632	34960
95	62086	18161	73521	28185	82169	35490
96	62651	18718	74071	28728	82705	36019
97	63215	19275	74621	29271	83241	36549
98	63779	19832	75171	29814	83778	37079
99	64343	20389	75721	30357	84314	37609

z	8200.	8300.	8400.	8500.	8600.	8700.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
0	138139	190781	242793	294189	344985	395193
1	38668	91304	43310	94700	45489	95692
2	39198	91827	43827	95211	45994	96191
3	39727	92350	44344	95722	46499	96690
4	40257	92873	44860	96233	47004	97189
5	40786	93396	45377	96743	47509	97688
6	41315	93919	45894	97254	48013	98187
7	41844	94442	46410	97764	48518	98685
8	42373	94965	46927	98275	49023	99184
9	42903	95488	47444	98785	49527	99683
10	43432	96010	47960	99296	50032	400182
11	43961	96533	48476	99806	50536	00680
12	44489	97055	48993	300316	51040	01179
13	45018	97578	49509	00826	51544	01677
14	45547	98100	50025	01336	52049	02176
15	46076	98623	50541	01847	52553	02674
16	46604	99145	51057	02357	53057	03172
17	47133	99667	51573	02866	53561	03670
18	47661	200189	52089	03376	54065	04169
19	48190	00711	52605	03886	54569	04667
20	48718	01233	53121	04396	55073	05165
21	49246	01755	53637	04906	55576	05663
22	49775	02277	54152	05415	56080	06161
23	50303	02799	54668	05925	56584	06659
24	50831	03321	55184	06434	97087	07157
25	51359	03842	55699	06944	57591	07654
26	51887	04364	56215	07453	58095	08152
27	52415	04886	56730	07963	58598	08650
28	52943	05407	57245	08472	59101	09147
29	53471	05929	57761	08981	59605	09645
30	53998	06450	58276	09490	60108	10142
31	54526	06971	58791	09999	60611	10640
32	55054	07493	59306	10508	61114	11137
33	55581	08014	59821	11017	61617	11635

z	8200.	8300.	8400.	8500.	8600.	8755.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
34	156109	208535	260336	311526	362120	412132
35	56636	09056	60851	12035	62623	12629
36	57163	09577	61366	12544	63126	13126
37	57691	10098	61880	13053	63629	13623
38	58218	10619	62395	13562	64132	14120
39	58745	11140	62910	14070	64635	14617
40	59272	11661	63424	14579	65137	15114
41	59799	12181	63939	15087	65640	15611
42	60326	12702	64453	15596	66143	16108
43	60853	13222	64968	16104	66645	16605
44	61380	13743	65482	16612	67148	17101
45	61907	14263	65997	17121	67650	17598
46	62433	14784	66511	17629	68152	18095
47	62960	15304	67025	18137	68655	18591
48	63487	15824	67539	18645	69157	19088
49	64013	16345	68053	19153	69659	19584
50	64539	16865	68567	19661	70161	20081
51	65066	17385	69081	20169	70663	20577
52	65592	17905	69595	20677	71165	21073
53	66118	18425	70109	21185	71667	21569
54	66645	18945	70622	21692	72169	22065
55	67171	19465	71136	22200	72671	22561
56	67697	19984	71650	22708	73172	23058
57	68223	20504	72163	23215	73674	23553
58	68749	21024	72677	23723	74176	24049
59	69275	21543	73190	24230	74677	24545
60	69800	22063	73704	24738	75179	25041
61	70326	22582	74217	25245	75680	25537
62	70852	23102	74730	25752	76182	26032
63	71378	23621	75243	26259	76683	26528
64	71903	24140	75757	26767	77184	27024
65	72429	24659	76270	27274	77686	27519
66	72954	25179	76783	27781	78187	28015

z	8200.	8300.	8400.	8500.	8600.	8700.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
67	173479	225698	277296	328288	378688	428510
68	74005	26217	77808	28795	79189	29005
69	74530	26736	78321	29301	79690	29501
70	75055	27255	78834	29808	80191	29996
71	75580	27773	79347	30315	80692	30491
72	76105	28292	79859	30822	81193	30986
73	76630	28811	80372	31328	81693	31481
74	77155	29330	80885	31835	82194	31976
75	77680	29848	81397	32341	82695	32471
76	78205	30367	81909	32848	83195	32966
77	78730	30885	82422	33354	83696	33461
78	79254	31404	82934	33860	84196	33956
79	79779	31922	83446	34367	84697	34450
80	80303	32440	83959	34873	85197	34945
81	80828	32958	84471	35379	85698	35440
82	81352	33477	84983	35885	86198	35934
83	81877	33995	85495	36391	86698	36429
84	82401	34513	86007	36897	87198	36923
85	82925	35031	86518	37403	87698	37418
86	83449	35549	87030	37909	88198	37912
87	83973	36066	87542	38415	88698	38406
88	84497	36584	88054	38920	89198	38900
89	85021	37102	88565	39426	89698	39395
90	85545	37620	89077	39932	90198	39889
91	86069	38137	89588	40437	90697	40383
92	86593	38655	90100	40943	91197	40877
93	87117	39172	90611	41448	91697	41371
94	87640	39690	91123	41953	92196	41865
95	88164	40207	91634	42459	92696	42358
96	88687	40724	92145	42964	93195	42852
97	89211	41242	92656	43469	93695	43346
98	89734	41759	93167	43974	94194	43840
99	90258	42276	93678	44479	94693	44333

z	8800.	8900.	9000.	9100.	9200.	9300.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
0	444827	493900	542425	590414	637878	684829
1	45320	94388	42908	90891	38350	85296
2	45814	94876	43390	91368	38822	85763
3	46307	95364	43873	91845	39294	86230
4	46800	95852	44355	92322	39766	86697
5	47294	96339	44837	92800	40238	87164
6	47787	96827	45319	93276	40710	87630
7	48280	97315	45802	93753	41181	88097
8	48773	97802	46284	94230	41653	88564
9	49266	98290	46766	94707	42125	89030
10	49759	98777	47248	95184	42596	89497
11	50252	99264	47730	95660	43068	89963
12	50745	99752	48212	96137	43539	90430
13	51238	500239	48694	96614	44011	90896
14	51730	00726	49176	97090	44482	91362
15	52223	01213	49657	97567	44953	91829
16	52716	01701	50139	98043	45425	92295
17	53208	02188	50621	98520	45896	92761
18	53701	02675	51102	98996	46367	93227
19	54193	03162	51584	99472	46838	93693
20	54686	03649	52065	99948	47309	94159
21	55178	04135	52547	600425	47780	94625
22	55671	04622	53028	00901	48251	95091
23	56163	05109	53510	01377	48722	95557
24	56655	05596	53991	01853	49193	96023
25	57147	06082	54472	02329	49664	96488
26	57639	06569	54953	02805	50135	96954
27	58131	07055	55434	03281	50605	97420
28	58623	07542	55916	03756	51076	97885
29	59115	08028	56397	04232	51546	98351
30	59607	08515	56878	04708	52017	98816
31	60099	09001	57358	05183	52488	99282
32	60591	09487	57839	05659	52958	99747
33	61082	09973	58320	06135	53428	700213

z	8800.	8900.	9000.	9100.	9200.	9300.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
34	461574	510459	558801	606610	653899	700678
35	62066	10946	59282	07086	54369	01143
36	62557	11432	59762	07561	54839	01608
37	63049	11918	60243	08036	55309	02074
38	63540	12404	60723	08512	55780	02539
39	64031	12889	61204	08987	56250	03004
40	64523	13375	61684	09462	56720	03469
41	65014	13861	62165	09937	57190	03934
42	65505	14347	62645	10412	57660	04399
43	65996	14832	63125	10887	58130	04863
44	66487	15318	63606	11362	58599	05328
45	66978	15803	64086	11837	59069	05793
46	67469	16289	64566	12312	59539	06258
47	67960	16774	65046	12787	60009	06722
48	68451	17260	65526	13262	60478	07187
49	68942	17745	66006	13736	60948	07652
50	69433	18230	66486	14211	61417	08116
51	69923	18716	66966	14686	61887	08581
52	70414	19201	67445	15160	62356	09045
53	70905	19686	67925	15635	62826	09509
54	71395	20171	68405	16109	63295	09974
55	71886	20656	68885	16583	63764	10438
56	72376	21141	69364	17058	64233	10902
57	72866	21626	69844	17532	64703	11366
58	73357	22111	70323	18006	65172	11830
59	73847	22595	70803	18481	65641	12294
60	74337	23080	71282	18955	66110	12758
61	74827	23565	71761	19429	66579	13222
62	75317	24049	72241	19903	67048	13686
63	75807	24534	72720	20377	67517	14150
64	76297	25018	73199	20851	67985	14614
65	76787	25503	73678	21325	68454	15078
66	77277	25987	74157	21799	68923	15542

z	8800.	8900.	9000.	9100.	9200.	9300.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
67	477707	526472	574636	622272	669392	716005
68	78257	26956	75115	22746	69860	16469
69	78747	27440	75594	23220	70329	16932
70	79236	27924	76073	23693	70797	17396
71	79726	28409	76552	24167	71266	17859
72	80215	28893	77030	24640	71734	18323
73	80705	29377	77509	25114	72203	18786
74	81194	29861	77988	25587	72671	19249
75	81684	30345	78466	26061	73139	19713
76	82173	30828	78945	26534	73607	20176
77	82662	31312	79423	27007	74076	20639
78	83151	31796	79902	27481	74544	21102
79	83641	32280	80380	27954	75012	21565
80	84130	32763	80858	28427	75480	22028
81	84619	33247	81337	28900	75948	22491
82	85108	33731	81815	29373	76416	22954
83	85597	34214	82293	29846	76884	23417
84	86085	34697	82771	30319	77351	23880
85	86574	35181	83249	30792	77819	24343
86	87063	35664	83727	31264	78287	24805
87	87552	36147	84205	31737	78754	25268
88	88040	36631	84683	32210	79222	25731
89	88529	37114	85161	32683	79690	26193
90	89018	37597	85639	33155	80157	26656
91	89506	38080	86117	33628	80625	27118
92	89995	38563	86594	34100	81092	27581
93	90483	39046	87072	34573	81559	28043
94	90971	39529	87549	35045	82027	28506
95	91460	40012	88027	35517	82494	28968
96	91948	40494	88505	35990	82961	29430
97	92436	40977	88982	36462	83428	29892
98	92924	41460	89459	36934	83895	30354
99	93412	41943	89937	37406	84362	30816

z	9400.	9500.	9600.	9700.	9800.	9900.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
0	731279	777236	822712	867717	912261	956352
1	31741	77693	23165	68165	12704	56791
2	32202	78150	23617	68613	13147	57229
3	32664	78607	24069	69060	13590	57668
4	33126	79064	24522	69508	14033	58106
5	33588	79521	24974	69955	14476	58545
6	34050	79978	25426	70403	14919	58983
7	34511	80435	25878	70850	15362	59422
8	34973	80892	26330	71298	15805	59860
9	35435	81348	26782	71745	16247	60298
10	35896	81805	27234	72192	16690	60737
11	36358	82262	27686	72640	17133	61175
12	36819	82718	28138	73087	17575	61613
13	37281	83175	28589	73534	18018	62051
14	37742	83631	29041	73981	18461	62489
15	38203	84088	29493	74428	18903	62927
16	38664	84544	29945	74875	19345	63365
17	39126	85001	30396	75322	19788	63803
18	39587	85457	30848	75769	20230	64241
19	40048	85913	31299	76216	20673	64679
20	40509	86369	31751	76663	21115	65117
21	40970	86826	32202	77109	21557	65554
22	41431	87282	32654	77556	21999	65992
23	41892	87738	33105	78003	22441	66430
24	42353	88194	33556	78459	22884	66868
25	42814	88650	34007	78896	23326	67305
26	43274	89106	34459	79343	23768	67743
27	43735	89562	34910	79789	24210	68180
28	44196	90017	35361	80236	24651	68618
29	44656	90473	35812	80682	25093	69055
30	45117	90929	36263	81128	25535	69492
31	45577	91385	36714	81575	25977	69930
32	46038	91840	37165	82021	26419	70367
33	46498	92296	37616	82467	26860	70804

z	9400.	9500.	9600.	9700.	9800.	9900.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
34	746959	792751	838066	882913	927302	971242
35	47419	93207	38517	83360	27744	71679
36	47879	93662	38968	83806	28185	72116
37	48340	94118	39419	84252	28627	72553
38	48800	94573	39869	84698	29068	72990
39	49260	95028	40320	85144	29510	73427
40	49720	95484	40770	85590	29951	73864
41	50180	95939	41221	86035	30392	74301
42	50640	96394	41671	86481	30834	74738
43	51100	96849	42122	86927	31275	75174
44	51560	97304	42572	87373	31716	75611
45	52020	97759	43022	87818	32157	76048
46	52479	98214	43473	88264	32598	76485
47	52939	98669	43923	88710	33039	76921
48	53399	99124	44373	89155	33480	77358
49	53858	99579	44823	89601	33921	77794
50	54318	800034	45273	90046	34362	78231
51	54778	00488	45723	90492	34803	78667
52	55237	00943	46173	90937	35244	79104
53	55697	01398	46623	91382	35685	79540
54	56156	01852	47073	91828	36126	79776
55	56615	02307	47523	92273	36566	80413
56	57075	02761	47973	92718	37007	80849
57	57534	03216	48422	93163	37448	81285
58	57993	03670	48872	93608	37888	81721
59	58452	04125	49322	94053	38329	82157
60	58911	04579	49771	94498	38769	82593
61	59370	05033	50221	94943	39210	83029
62	59829	05487	50670	95388	39650	83465
63	60288	05942	51120	95833	40090	83901
64	60747	06396	51569	96278	40531	84337
65	61206	06850	52019	96722	40971	84773
66	61665	07304	52468	97167	41411	85209

z	9400.	9500.	9600.	9700.	9800.	9900.
	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
67	762124	807758	852917	897612	941851	985645
68	62582	08212	53366	98057	42291	86080
69	63041	08666	53816	98501	42731	86516
70	63500	09119	54265	98946	43172	86952
71	63958	09573	54714	99390	43612	87387
72	64417	10027	55163	99835	44051	87823
73	64875	10481	55612	900279	44491	88258
74	65334	10934	56061	00723	44931	88694
75	65792	11388	56510	01168	45371	89129
76	66251	11841	56959	01612	45811	89564
77	66709	12295	57407	02056	46251	90000
78	67167	12748	57856	02500	46690	90435
79	67625	13202	58305	02944	47130	90870
80	68083	13655	58754	03389	47569	91305
81	68541	14108	59202	03833	48009	91741
82	69000	14562	59651	04277	48448	92176
83	69458	15015	60099	04721	48888	92611
84	69915	15468	60548	05164	49327	93046
85	70373	15921	60996	05608	49767	93481
86	70831	16374	61445	06052	50206	93916
87	71289	16827	61893	06496	50645	94350
88	71747	17280	62341	06940	51085	94785
89	72204	17733	62790	07383	51524	95220
90	72662	18186	63238	07827	51963	95655
91	73120	18639	63686	08271	52402	96090
92	73577	19092	64134	08714	52841	96524
93	74035	19544	64582	09158	53280	96959
94	74492	19997	65030	09601	53719	97393
95	74950	20450	65478	10044	54158	97828
96	75407	20902	65926	10488	54597	98262
97	75864	21355	66374	10931	55036	98697
98	76322	21807	66822	11374	55474	99131
99	76779	22260	67270	11818	55913	99566

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Mainz,
gedruckt bei Florian Kupferberg.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Creizenach, Michael,

Anleitung zur höhern Zinsrechnung nebst Logarithmen-Tafeln der Zahlen von 1
bis 10.000 in 7 Dezimalreihen

Mainz 1825

Math.p. 740 o
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083388-3